Jan Vriend

X E N A K I S

WISKUNDE & KOMPONEREN

PROVISORIESE INLEIDING OP DE DELEN 1 - 3.

Om een aantal praktiese redenen ligt hier voor u nog slechts een gedeelte van een boek dat gaat heten

- X E N A K I S -

WISKUNDE EN KOMPONEREN.

"*Inleiding en kommentaar op zijn kompositiemethoden en hun filosofiese achtergronden*".

Het ligt in de bedoeling nog dit jaar een voltooide uitgave te kunnen aanbieden die onder auspicien van het ASKO (Prinsengracht 989, Amsterdam) in een (voorlopig) nederlandse versie verkrijgbaar zal zijn. Deze eerste drie delen zijn uitsluitend voor intern gebruik, zodat ik u moet verzoeken niets uit deze bladzijden voorlopig te gebruiken voor reproduktie of andere wijzen van vermenigvuldiging of publikatie, onder meer ook omdat er waarschijnlijk nog een aantal verbeteringen in zullen moeten worden aangebracht of fouten uit moeten worden verwijderd. Ik wil daarom van de gelegenheid gebruik maken om op- of aanmerkingen, adviezen of terechtwijzingen die u bij het doorlezen van deze tekst te binnen mochten schieten, op welke wijze dan ook aan mij te willen doorspelen (adressen en telefoonnummers volgen). Ik zal u daar zeer erkentelijk voor zijn.

Zoals uit de inhoudsopgave is af te lezen, bevatten deze eerste drie delen een overzicht van, en uiteezettingen over Formalisatie in Xenakis' muziek en theorieën, en over de kompositieprocédés die zijn toegepast in (met name) Achorripsis en de zogenaamde ST-stukken (de periode 1957-62). Hierin wordt de zogenaamde stochastiese muziek uitvoerig beschreven en de erbij betrokken wiskunde-materie zoveel mogelijk uitgelegd op een wijze dat mensen met een middelbare school-kennis de redeneringen moeten kunnen volgen. Er staan zoveel mogelijk uitgewerkte voorbeelden in, deels door mijzelf ontworpen, deels ontleend aan de theoretiese geschriften van Xenakis (zie boekenlijst achterin).

De opzet van het boek is drieërlei:

1. een zo begrijpelijk en grondig mogelijke uiteenzetting te geven van Xenakis' werk- en denkwijzen om

2. aan de hand daarvan een (één-jarige) kursus te kunnen geven (vandaar het leerboek-karakter van de techniese hoofdstukken) en

3. eveneens op grond daarvan een uitvoerige inleiding, maar vooral een zo veelzijdig mogelijk kommentaar te kunnen baseren.

De eerste doelstelling komt tegemoet aan de behoefte van veel musici (theoretici en komponisten) om zich in Xenakis' methoden te kunnen verdiepen zonder eerst jarenlang wiskunde te hoeven studeren. Xenakis' eigen geschriften vormen een tamelijk onsystematies samenraapsel van opstellen die hij in de loop van de tijd publiceerde en waarvan de belangrijkste gebundeld zijn in "Formalized Music", de engelse en zeer uitgebreide versie van "Musiques Formelles". Hij heeft zich op wisselende wijze iets gelegen laten liggen aan de kompetentie van zijn lezers: gemakkelijk toegankelijke uiteenzettingen wisselen vaak abrupt af met uiterst gecomprimeerde wiskundige redeneringen, die soms veel specialistiese voorkennis vereisen. (Zoals in veel slechte wiskundeboeken vaak gebeurt...) Een van die verwarrende aspekten van een boek dat op een dergelijke wijze tot stand is gekomen, is het gebrek aan opbouw: kennis uit voorgaande hoofdstukken wordt niet konsekwent gebruikt voor ontwikkeling van nieuwe kennis in volgende hoofdstukken. Hinderlijk is daarbij ook dat geen konsekwente wiskundige terminologie ontstaat, die, voor zover bruikbaar, in alle mogelijke uiteenzettingen ongewijzigd gebruikt wordt. In de begin-hoofdstukken van mijn eigen schrijfsel zal deze tekortkoming mij ook nog wel parten hebben gespeeld. Dit moet dan vooral op rekening worden gezet van mijn poging om een algeheel OVERZICHT te geven van Xenakis' theoretiese werk, waardoor ik mij soms genoodzaakt voelde zijn terminologie over te nemen, of althans op de voet te volgen.

De tweede doelstelling is een uitvloeisel van mijn werkzaamheden bij het ASKO. In het kader van de aktiviteiten van deze organisatie heb ik verschillende lezingen-series over dit en aanverwante onderwerpen verzorgd, waarbij de behoefte aan een gedegen handleiding zich voortdurend manifesteerde. Veel mensen willen de materie nog eens rustig door kunnen nemen, met de mogelijkheid om ingewikkelde redeneringen of uitwerkingen van procédés die in veel etappes verlopen, nog eens door te nemen, te kontroleren, of wellicht zelf te leren toepassen (ik denk vooral aan komponisten).

De derde doelstelling komt tegemoet aan mijn eigen behoefte om - afgezien van de noodzaak mij los te werken uit een vader-

zoon invloedsfeer - de kontroversiele natuur van Xenakis' technieken, van de er achter liggende gedachten en hun invloed, op zo helder mogelijke wijze te beschrijven. Het is mijn overtuiging dat Xenakis een van de belangrijkste vernieuwers van de na-oorlogse muziek is, met name waar het gaat om het ontwerpen van een geformaliseerde standaardtaal, en daarmee een techniek, waarmee niet alleen nieuwe muziek op geheel nieuwe wijze geconcipieerd kan worden, maar waarmee eindelijk uiterst soliede bruggen gebouwd kunnen worden naar andere wetenschappen en vakgebieden; waarmee ook de ingeslapen geborneerdheid van het 19de eeuwse muziek-vakjargon opengebroken kan worden en plaats kan maken voor een veel objektievere, veel toegankelijker en veel preciesere taal, op grond waarvan open onderzoek, kontrole, kritiek kan worden uitgeoefend en interdisciplinaire studies kunnen worden gebaseerd. Ik denk bij dit laatste aan wetenschappen die zich bewegen op het terrein van de waarnemingspsychologie, informatie-verwerking, probleem-oplossend gedrag, betekenis-analyse, communicatie; maar ook aan studies die de muzikale taal en zijn werking vergelijken met andere 'talen' en hun werking (zie vooral Jos Kunst, Otto Laske, Umberto Eco, en wellicht Nicolas Ruwet).

Xenakis' werkwijzen zijn daarvoor op z'n minst een aanloop, een uitganspunt. Dat is een van zijn grote verdiensten. De grootheid van die verdienste hangt zeker ook samen met de doeltreffenheid waarmee vanuit zijn technieken en optiek de kinderachtigheden, banaliteiten en het pseudo-prestige te voorschijn komen van de meeste seriële en dodekafoniese methoden, die de westerse muziek weinig goed gedaan hebben. Maar er zit ook een keerzijde aan de medaille. Een keerzijde die aan elke wetenschappelijke of semi-wetenschappelijke arbeid vast zit: het gevaar van misbruik, mystifikatie, mythologiseren. De technokratiese kanten aan Xenakis' werk, die moeilijk los te denken zijn van zijn vroegere samenwerking als bouwkundig ingenieur met Le Corbusier, komen bij verschillende gelegenheden tot uiting en zijn niet altijd vrij te pleiten van dat prestigieuze karakter waarmee ook het Groot Kapitaal zich zo gaarne manifesteert.

Het is voor mij interessant, en voor een evaluatie van de betekenis van Xenakis' muziek en denken van belang, om verbanden te leggen tussen dergelijke (geopteerde) aspekten en de aard

van zijn produkten. Ik meen dat deze verbanden er ook zijn en hoe zouden ze beter aangetoond kunnen worden dan wanneer er een grondige studie van die produkten (theoretiese én muzikale) aan vooraf gegaan is, zowel bij de lezer als de auteur! Ik meen dat met een gedetailleerde bestudering van die verbanden bovendien een veel genuanceerdere kritiek te voorschijn kan komen dan wanneer we volstaan met een paar gemakkelijke en oppervlakkige konstateringen, die de kritikus wel snel van de door hem gewenste signatuur kunnen voorzien, maar zonder openingen blijven voor verdere uitdieping. Er zal een veel algemenere problematiek mee boven water komen: die van de vraag, of muziek een weerspiegeling is van meer dan het muzikale denken van een komponist alleen; die van de vraag naar de verantwoordelijkheid, integriteit en betrokkenheid van een komponist via de produktie en publikatie van zijn werken; die van de vraag of muziek een waardevrije, ongevaarlijke, ongebonden, niet aktuele en beslist invloedsloze uiting is van de ongebreidelde, aan geen normen, moraal, etiek of filosofie toetsbare kreativiteit! We zullen zien.

Het is mijn bedoeling om zo'n evaluatie van Xenakis' werken te ondernemen in het slothoofdstuk van de uiteindelijk versie. Deze zal uiteraard ook onderzoekingen bevatten met betrekking tot de (puur?) technies-kompositóriese aspekten van een dergelijke muziek, de toekomstige muziek, het toekomstig komponeren d.i. het muzikale denken = geweten.

Xenakis vertrouwde mij dan ook het volgende toe: "(...)ainsi les angoisses que j'ai traversées et que je traverse encore, moi, individu comme les autres, pourront peut-être servir de prétexte á d'autres, de catalyse, pour donner un nom, un visage, une forme á cette réalité que nous forgeons et détruisons éternellement. C'est pourqoui ce type de travail que vous avez entrepris, devrait á mon avis avoir plusieurs volets parallèles et communicants (en contrepoint):

a.	b.	c.	d.	e.
techniques	philosoph.	esthétiques	social	futurologiques
mathémat.	ontologiques	psychophysiol.	...	...
...	devenir	...		
	...			

Ik pretendeer allerminst - nog afgezien of het de hendelbaarheid van het boek ten goede zou komen - een dergelijke aanpak ten aanzien van Xenakis uitputtend te kunnen ondernemen. Wel wil ik proberen een basis voor dit soort onderzoek te leggen. In toekomstige studies hoop ik er dan uitvoeriger o' terug te komen, met name in samenhang met het theoretiese werk van Jos Kunst, dat de problematiek meer in zijn algemeenheid benadert.

Jan Vriend, februari 1977
Het Laagt 129
Amsterdam Noord.
o20-365972
020-833780

ASKO
Prinsengracht 989
Amsterdam
020-227578

INHOUDSOPGAVE

1. FORMALISATIE IN MUZIEK

1.0.0. Wat is formalisatie?

1.0.1. De invloed van beperkingen en virtualiteiten binnen de formaliserende taal zelf: formalisatie is een vertaalprobleem.

1.0.2. Wiskunde en komponeren. De tot-stand-koming van een muziekwerk in 8 stadia (volgens Xenakis)

1.1.0. Kode en werkelijkheid.

1.1.1. *Afbeelding* en *funktie* van verschijnselen op de rij van de Hele Getallen en de verzameling van Reële Getallen.

1.1.2. Temporele algebra: de tijd als meetlat.

1.1.3. Toonhoogte als funktie van de tijd. Generalisatie van de lineaire funktie.

1.1.4. Interpretatie van getallen met behulp van regels (definities) die oneigenlijk gebruik voorkomen:
1. de nominale of klassifikatoriese schaal;
2. de ordinale of rangorde schaal;
3. de intervalschaal;
4. de ratio schaal.

1.1.5. Grove samenvatting van de belangrijkste formalisatieniveau's bij Xenakis.

1.1.6. Parenthese.

1.2.0. Een vektor als uitdrukking voor wederzijdse beinvloeding tussen meerdere van elkaar (lineair) afhankelijke eigenschappen of verschijnselen: gedrag in meerdimensionale ruimten.

1.2.1. Een muzikaal vier-dimensionale ruimte.

1.2.2. Een axiomatiese grondslag voor de vektorbeschrijving. Reflexiviteit, commutativiteit en associativiteit buiten-de-tijd en in-de-tijd.

1.2.3. Parenthese.

1.2.4. Intervalgrootten. Reflexiviteit, antisymmetrie en transitiviteit.

1.2.5. De intervallen (als afstanden) vormen een additieve Abelse Groep.

1.2.6. Wiskundige operaties op vektoren.
1. een interne kompositiewet;
2. een externe kompositiewet;
3. de eenheidsvektor.

1.2.7. Samenvatting.

1.2.8. Parenthese. Enkele algemene toespelingen op notatiesystemen voor muziek.

1.3.0. De vektor (h,s,d) en 'timbre'. Een paar voetnoten!

1.3.1. Screens. Een geluidskontinuum als het verspringen van geluidsbeelden met een komplexe toonhoogte/geluidsterkte-struktuur. De 'kwantumtheorie' van geluid.

1.3.2. Parenthese.

1.3.3. Een algebra voor de screens: intersektie, vereniging en complementariteit (negatie).

1.4.0. "New Proposals in Microsound Structure'. Xenakis' visie op klanksynthese en -analyse.

1.4.1. 'Pressure curves': hoe ontstaan ingewikkelde kurven uit minder ingewikkelde.

1.4.2. Xenakis' voorstellen en enkele resultaten.

1.4.3. Parenthese.

---

2. TOONHOOGTEROOSTERS en RESTKLASSE ALGEBRA.

2.0.0. Woord vooraf.

2.0.1. Aristoxenes van Tarente's beschrijving van de Griekse muziek (volgens Xenakis).

2.0.2. De Byzantijnse muziek.

2.0.3. Korte samenvatting.

2.1.0. Modulen. Uitgangspunten voor de restklasse algebra.

2.1.1. Alle roosters kunnen gekonstrueerd worden met behulp van operaties op twee modulen. Periodiciteit, congruentie, transpositie en modulatie. Een standaard-formule.

2.1.2. Enkele elementaire operaties uit de restklasse algebra.

2.1.3. Xenakis' toepassing.
1. de majeurladder als rooster;
2. andere onderverdelingen van het oktaaf;
3. metabolae (transpositie en modulatie).

---

3. VAN 'MASSES SONORES' NAAR 'ACHORRIPSIS'.

3.0.1. Korte inleiding.

3.0.2. Een werkhypothese.

3.0.3. Geometrisering en dichtheidskonsepten (gemiddelden en afwijkingen) in de eerste komposities van Xenakis.

3.1.0. De konstruktie van een muzikale 'massa': een pizzicato-wolk.

3.1.1. Onregelmatigheid benaderen vanuit (eerste-orde) periodiciteit. Enige beginselen uit de kombinatoriek. De konstruktie van een enigzins onregelmatige reeks vanuit tweede-orde periodiciteit.

3.1.2. Een statistiese benadering. Het begrip VERDELING. Het aantal verdelingen is onbegrensd.

3.1.3. Gemiddelde en afwijking. Een Stochastiese variabele en een Percentage schaal.

3.1.4. Percentages als oppervlakten onder de kurve, die de grafiese voorstelling (afbeelding) van een verdeling is. De rechthoekverdeling.

3.2.0. Xenakis' keuze voor een specifieke verdeling gemotoveerd.

3.2.1. Een topografiese oplossing: de Poisson-verdeling.

3.2.2. De formule van de Poissonverdeling 'genereert' de pizzicato-wolk. Wat zijn 'zeldzame gebeurtenissen'?

3.2.3. Parenthese.

3.3. ACHORRIPSIS.

3.3.0. De konstruktie van matrix M: een plattegrond van dichtheden over timbres (Poisson).

3.3.1. De détail-konstruktie van één enkele cel uit matrix M: strijkersglissandi.

3.3.2. De verdeling van tijdsintervallen tussen de beginpunten van elk glissando.

3.3.3. De snelheid van een glissando als een schuine lijn.

3.3.4. Een voorbeeld uit de kinetiese gastheorie (Maxwell en Boltzmann).

3.3.5. Een voorbeeld uit de sociale statistiek. Eigenschappen van de Normale of Gauss verdeling. De standaardmaat z.

3,3,6. Een voorlopige oplossing van de snelheidsverdeling. Het effekt van veranderingen in standaardafwijking en gemiddelde. Een verdeling rondom snelheid = 0.

3.3.7. Drie verdelingen (Maxwell/Boltzmann, Gauss en Xenakis/Lévy). Xenakis' verdeling en een benadering met de standaard Gauss verdeling.

3.3.8. Toonhoogte als resultaat van een interval verdeling. Een diskrete en een kontinue verdeling. Een definitie van 'kans' (toeval).

3.3.9. Samenvatting. Wat is dus Stochastiese Muziek?

3.4. VERDERE UITWERKING IN DE ST-STUKKEN EN FORMALISATIE VOOR COMPUTERVERWERKING.

3.4.0. De lengten van alle segmenten is een stochastiese verdeling van tijdsintervallen tussen beginpunten van segmenten.

3.4.1. Gemiddelde dichtheden per segment. Exponentiele en lineaire toename. Logaritme-intervallen als basis voor de verdeling. Het verschil tussen een verdeling van dichtheden, en een verdeling van dichtheidsfluktuaties.

3.4.2. De verdeling van timbreklassen als funktie van (gekoppeld aan) dichtheid.

3.4.3. Tijdsintervallen tussen elke individuele (klank-)gebeurtenis.

3.4.4. Verdeling van timbres over de in 3.4.3 gevonden tijdsstippen.

3.4.5. Toonhoogte als funktie van de instrumenten.

3.4.6. Een nieuwe toepassing van de Gauss verdeling op glissandosnelheden. Relaties tussen gemiddelde en standaardafwijking. Glissandosnelheden ook als funktie van dichtheid.

3.4.7. De lengte (duur) van elke klank. Een Normale verdeling in afhankelijkheid van een maximumduur, dichtheid en timbrevertegenwoordiging.

3.4.8. De verdeling van sterktegraden is random.

- NOTEN
- APPENDIX
- Korte lijst van geciteerde werken.

1.0.0. Voordat wiskunde en muziek in operationeel verband gebracht worden, moeten een aantal zaken uit het ene domein gedefinieerd worden in het andere. In de empiriese wetenschappen wordt wiskunde 'toegepast'. Strikt genomen loopt het verkeer in één richting: een afgebakend onderzoeksgebied wordt zo nauwkeurig mogelijk gedefinieerd in een of andere taal (bv het vakjargon van de betreffende wetenschap). Hiervanuit wordt vervolgens toegewerkt naar een *formalisatie* in een zodanige taal, dat de onderzoeksgegevens op zo overzichtelijk en nauwkeurig mogelijke wijze kunnen worden verwerkt tot de konklusies en uitspraken die het onderzoek zich ten doel heeft gesteld.

Overzichtelijk betekent bijvoorbeeld dat de gekozen taal niet te ingewikkeld, niet te omslachtig is; daarentegen vooral als een handige kodering funktioneert en zo min mogelijk plaats-, en dus tijdsruimte in beslag neemt bij verwerking.

Nauwkeurig: de taal geeft zo precies en getrouw mogelijk de wijze waarop de verschijnselen 'begrepen' en 'gemeten' worden weer. Hiermee wordt bereikt dat het onderzoek *'bespreekbaar'* wordt voor de onderzoekers zelf, *kontroleerbaar (toetsbaar)* voor de wetenschappelijke wereld, en geschikt voor ondubbelzinnige hervertalingen naar jargons, die het *toegankelijk* moeten maken voor (in principe) iedereen.

1.0.1. Nooit kan echter uitgesloten worden dat er tweerichtingsverkeer optreedt: de 'vertalingen' of formalisaties gaan zelf ook hun invloed uitoefenen op de wijze van onderzoek. M.a.w. het 'domein' van de formaliserende taal, het systeem of model van die taal, de regels, wetten, conventies, kortom *beperkingen en virtualiteiten* daarbinnen, gaan vrijwel zeker 'meedoen' aan het onderzoek. Iemand die goed frans spreekt, gaat de dingen die hij vroeger in zijn moedertaal (bv het nederlands) dacht, nu 'op z'n frans'denken; aangezien deze taal op verschillende niveau's van het nederlands verschilt (dwz niet een één-op-één afbeelding ervan is) zal hij erdoor op nieuwe gedachten gebracht worden, die niet, of op minder voor de hand liggende wijze in het nederlands bij hem 'opgekomen' konden zijn.(Neem bv de Natuurlijke Getallen: als ze alleen voor optellen of aftrekken worden gebruikt, heb je geen priemgetallen nodig. Toch zitten ze erin.)

Van de éne kant moet een dergelijk effekt tot waakzaamheid aansporen, met name waar het op 'vertalen' aankomt; aan de andere kant moet het ook niet verontrusten, immers: vertalen doen we altijd. Begrijpen is altijd begrijpen-in-de-een-of-andere-taal, en dus met alle hebbelijkheden van zo'n taal. De zintuigelijke waarneming staat nooit alleen; deze vindt altijd plaats in dié talen en dus dié systemen, die tot de denkbagage van een waarnemer behoren. De bagage zelf wordt daarmee overigens tot een dynamies proces, in tegenstelling tot de statiese konsepties die wij daar vaak over maken. 'Bagage' is hier wat 'in leven', in beweging gehouden, voortdurend gereaktiveerd moet worden. Dat gebeurt met name wanneer men voor opgaven gesteld wordt, met konfliktstof in aanraking komt, 'oplossingen' moet vinden.

Muziek vertalen in proza, poëzie, beelden, geuren, mimiese voorstellingen enzovoort, gebeurt alom. Vanaf het moment dat we ons serieus zorgen gaan maken misverstaan te worden, of vanaf het ogenblik dat gebruikelijke weergaven ontoereikend blijken bij het produceren van muziek, nemen we in het algemeen, als in de empiriese wetenschappen, onze toevlucht tot'afbeeldingen' in systemen die een algemenere bruikbaarheid c.q. geldigheid hebben, respektievelijk een adekwatere verwerking mogelijk maken.

1.0.2. Wiskunde, in de ruimere zin van het woord de mathematiese logika, is zo'n overzichtelijke en nauwkeurige taal. Meer nog: onvermoeid wordt er aan verder gesleuteld, zowel ten gevolge van de behoefte om haar in steeds weer nieuwe situaties bruikbaar te maken, als de ontdekking van inconsistenties of virtualiteiten binnen het systeem zelf. De noodzaak om in een voortschrijdende vertechnisering van de wereld om ons heen de beschikking te hebben over een ondubbelzinnige kode, staat buiten kijf. De noodzaak om zogenaamde 'minder techniese en materiële' zaken met dezelfde rigoureuze begrippen en konsepten aan te pakken, wordt door velen op z'n minst betwijfeld, door sommigen zelfs heftig bestreden. Magiese Werkingen zouden erdoor worden gedwarsboomd of zelfs ontluisterd. Vanuit dergelijke standpunten hebben veel muziektheorieën en -filosofieën zich ontwikkeld tot denksystemen, zoals die in de theologie en andere religi-

euze doktrines in gebruik zijn. Terwijl men zich er in die gebieden nog op beroepen kan met a priori niet-kenbare dingen te moeten werken, zou men ten aanzien van de muziek op z'n minst moeten erkennen, dat de ingrediënten prakties in hun geheel tot het 'grijpbare' en 'bestuurbare' gerekend dienen te worden. Dit standpunt wordt onder meer geruggesteund door het feit dat meerdere notatie-systemen in staat zijn een benaderend beeld te geven van de klinkende werkelijkheid, meer in het bijzonder nog zoals die werkelijkheid door ons begrepen, gevolgd kan worden. (cf VRIEND 1975, KUNST 1975/76) Van alle kunsten behoort muziek tot de kategorie waarvan althans de ingrediënten (komponenten) zich het gemakkelijkst voor abstraktie en dus generalisatie en formalisatie lenen.

Xenakis beschouwt het komponeren dan ook primair als een kombinatoriek, als een kunst van het samenstellen, en vat het kompositieproces (de geschiedenis van een muziekwerk) als volgt samen (FM p.22):

1. *Begin-konsepten.* (intuities, voorlopige of definitieve gegevens)
2. *Definitie van het klankmateriaal* en zijn symboliese weergave, voor zover dit binnen de grenzen van de beschikbare middelen ligt (klank van de muziek instrumenten, elektroniese klanken, ruisklanken, verzamelingen van geordende klankelementen, korrel of kontinue formaties etc)
3. *Definitie van de transformaties* die deze klankobjekten moeten ondergaan in de loop van een kompositie (makrokompositie: vaststelling van het logiese raamwerk dwz van algebraiese basisoperaties en de wijze waarop de objekten, de verzamelingen en hun symbolen, zoals die gedefinieerd zijn onder 2, met elkaar in relatie gebraht worden; en de volgorde van deze operaties in de lexicografiese tijd met behulp van opeenvolging en gelijktijdigheid.
4. *Mikrokompositie,* (keuze en gedetailleerde vaststelling van de funktie- of stochastiese relaties[1)] tussen de elementen van 2.) dwz algebra-buiten-de-tijd, en algebra-in-de-tijd.[2)]
5. *In volgorde zetten* van 3 en 4: schema, patroon van het werk in zijn geheel.
6. *Uitvoering van de berekeningen,* kontroles, terugkoppelingen

en definitieve herzieningen in het volgorde-programma.

7. *Definitief symbolies resultaat* van het programma. (de muziek op papier zetten in traditionele notatie, numerieke weergave grafieken of andere solmisatie middelen).
8. *Omzetting in klank* van het programma. (Direkte orkestrale uitvoering, omzettingen van het type elektro-magnetiese muziek, gemechaniseerde tot stand koming van de klankobjekten en hun transformaties bv via een computer).

De diverse stadia zullen in de loop van dit boek aan bod komen. Ofschoon Xenakis in de vijftiger jaren zo ver gaat, ten aanzien van fase 6, 7 en 8 de wens uit te spreken dat tussenkomst van de mens in de nabije toekomst geheel overbodig mag worden ten gunste van een uitgebreide mechanisatie en gecomputeriseerde fabrikage, is zijn aanpak verder grotendeels bruikbaar voor 'handwerk'. Wel wijst hij hiermee duidelijk op de verregaande formaliseerbaarheid van het materiaal, waarmee we ons in dit en de volgende hoofdstukken uitvoerig bezig gaan houden.

1.1.0. Het is de primaire taak van een komponist om muziekstukken te maken, niet zozeer om zijn produktie methoden uiteen te zetten, laat staan er de wetenschappelijke grondslagen voor op te stellen. Als een komponist dan toch al tot publikatie van die methoden overgaat, zoals Xenakis doet, behoeven wij nog niet van hem te verlangen op elke slak het wetenschappelijke zout te leggen. Xenakis is zich echter zeer bewust van de ogen die meeloeren bij zijn uitspraken en dekt zich alvast in door op heel veel plaatsen van een aantal hypothesen uit te gaan, maw. van aannamen waarvan we de bewijsvoering voorlopig opschorten of geheel aan naderen overlaten. Met een groot deel van die hypothesen zullen we echter niet veel moeite hebben. We zijn allang blij dat iemand de moeite neemt om de uiteenzetting van zijn werkwijze zo serieus ter hand te nemen.

Voordat er een getal in plaats van een 'noot' op papier komt te staan, moet je er namelijk vanuit gaan dat een of ander geluid eigenschappen bezit of uit onderdelen bestaat die van elkaar te onderscheiden zijn, zodat zo'n getal of noot voor een goed afgebakend stukje werkelijkheid staat. Met andere woorden, als we een *kode* ontwerpen om natuurverschijnselen en hun gedragingen weer te geven (bv geluiden) behoort daarbij een nauwkeurige omschrijving van het *betekenis-systeem* dat de relatie *kode-werkelijkheid* afbakent (vgl ECO 1968). 'Noten lezen' veronderstelt kennis van zowel het notatie systeem als de geluiden die het beschrijft. 'Getallen lezen' veronderstelt kennis van het onderhavige getallen systeem en de werkelijkheid die erdoor beschreven wordt. (Natuurlijk kunnen beide systemen ook onafhankelijk van hun specifieke toepassingsgebied gelezen worden, maar dat is iets wat voor dit ogenblik weinig ter zake doet.) In de wiskunde definiëren we zo'n relatie als een *afbeelding* van een domein A (bv getallen) op een ander domein B (bv de 7 tonen van de toonladder $C\ D\ E\ F\ G\ A\ B\ C$). A heet het definitiegebied, B het beeldgebied (in het engels resp. *domain en range*).

1.1.1. De afbeelding

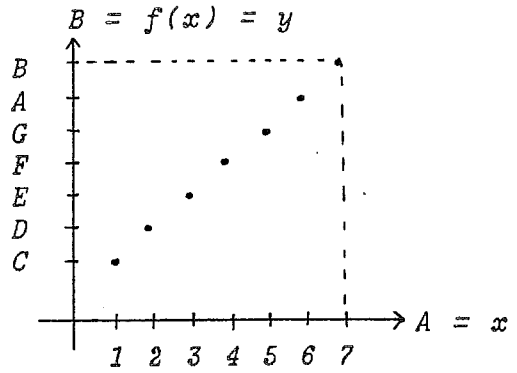
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & & & & & & \\ C & D & E & F & G & A & B \end{array}$$

is een één-op-één afbeelding: de elementen uit de verzameling

$A = \{1,2,...7\}$ zijn elk afzonderlijk met één onderscheiden element uit de verzameling $B = \{C,D,...B\}$ in relatie gebracht. Als de elementen van A met x aangeduid worden ($A = \{x: x=1,2,...7\}$) en die van B met y ($B = \{y: y=C,D,...B\}$), dan kan men de relatie ook aangeven met de lineaire funktie-uitdrukking

(1) $f(x) = x: x \rightarrow y$ waarin $x = 1,2,...7$
en $f(x) = y = C,D,...B$
(C-majeur)

In dat geval wordt de relatie gedefinieerd door een operator f die ervoor zorgt dat x op de juiste wijze op y afgebeeld wordt, of op de gewenste wijze naar y getransformeerd wordt: dat is de *funktie* van f en we noemen zo'n relatie tussen x en y dan ook wel een funktie-relatie, in ons geval tussen de paren $(1,C)$, $(2,D)$,...$(7,B)$.
Het domein van de funktie is eindig, het beeldgebied is dat eveneens, dwz A en B zijn zowel aan de onderkant als aan de bovenkant begrenst.



afb. 1.

Wil men beide verzamelingen in principe (tot over de grenzen van het hoorbare) als oneindig uitdrukken, kan dat als volgt:

(2) $f(x) = x: x \rightarrow y$ $x = ...-2,-1,0,1,2,...$
$f(x) = y = ...A\ ,B\ ,C,D,E,...$
$f(0) = c' =$

Deze funktie wordt een lineaire funktie genoemd, in de 'grafiek' tot uitdrukking gebracht doordat men een rechte lijn kan trekken door alle punten.[3)]
Domein en beeldgebied zijn *diskontinu of diskreet*, dwz kunnen geen waarden aannemen tussen de elementen van de verzameling

in. Wil men een relatie konstrueren om *alle* toonhoogten mee te kunnen vangen (een oneindig glissando) dan kan voor het domein A de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$ worden genomen :

$$dom\ A = \{x:\ x \in \mathbb{R}\}$$

dwz de kontinue verzameling waarin x <u>alle</u> waarden kan aannemen tussen elk willekeurig getallenpaar uit de rij van de hele getallen, die hierboven werd gebruikt. Voor het beeldgebied B kunnen we elke eenheid kiezen die we wensen, bv *alle* toonhoogten binnen een willekeurig interval. Kiezen we de kleine sekunde als uitgangseenheid, en benoemen we bv de toonhoogte c' (zie boven) tot nul, cis' tot 1, d' tot 2 etc, dan luidt de funktie:

(3) $f(x) = x:\ x \rightarrow y$ waarin $x = \{x:\ x \in \mathbb{R}\}$

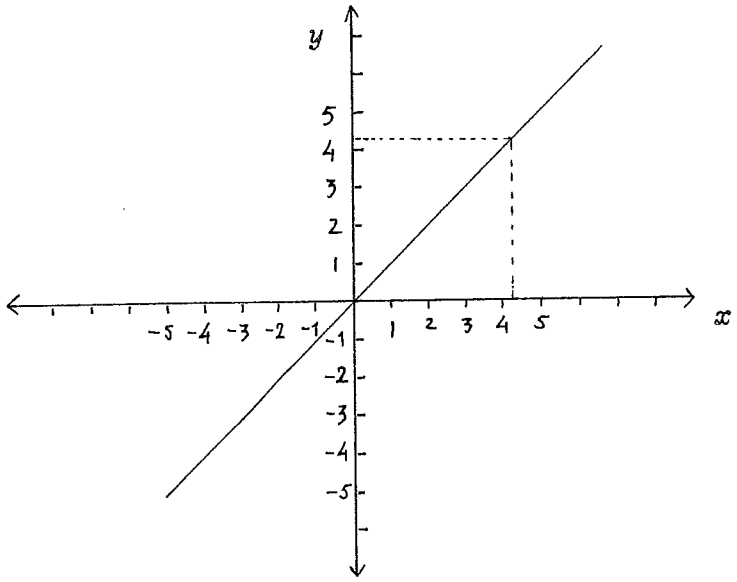
$f(x) = y = \{y:\ y \in \mathbb{R}\}$

en $f(0) = c' =$

($\mathbb{R}$ = de verzameling van reële getallen)

en $|y-(y+1)|$ = kleine sekunde.

In een grafiek ziet dat er zo uit:



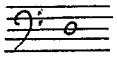
afb. 2.

We zien nu dat de operator f zó gedefinieerd is, dat er voor elke x ergens een y is, zelfs als bv $x = \sqrt{20}$. De uitdrukking $f(0) = c'$ is nodig om te weten waar een orientatiepunt ligt: als ik in de funktie voor x nul invul, korrespondeert die met de c boven het sleutelgat van de piano. (vgl 0° Celsius = smeltpunt van ijs $\rightarrow$ water). De uitdrukking $|y-(y+1)|$ is nodig om aan te geven hoe groot de toonhoogteafstanden zijn als ik

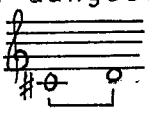
van een bepaald getal naar een volgende ga. Op de y-as staat hier dus de oneindige, chromatiese toonladder. (vgl de temperatuursafstanden op de Celsius-schaal: van 0° tot 100° = van vriespunt tot kookpunt bij water, onder bepaalde atmosferiese omstandigheden).

1.1.2. We kunnen nu snel een paar sprongen vooruit. Als we nog even aan het toonhoogte-aspekt vasthouden (één van de hypothesen waar we vanuit gaan is dat toonhoogte een eigenschap van geluid is - cf 1.1.0.) maar de x-as bv eens veranderen in een tijds-as, zijn we bezig met wat Xenakis TEMPORELE ALGEBRA noemt: de tijd als een meetlat, waarop we rustig van achter naar voren kunnen lezen, en omgekeerd, zonder rekening te houden met de werkelijke tijd waarin niets teruggedraaid kan worden. (Rekening in deze tijd noemt Xenakis ALGEBRA IN DE TIJD, waarover later).

Als we de getallen op de x-as (in afb 2), het domein van de tijd, nu eens in seconden uitdrukken, dan zegt de funktie:

- als de chronometer (x-as) -10 aanwijst, bevindt een omhoogglijdende toon zich op hoogte d = 

- als de chronometer -4 aangeeft, bevindt hij zich op

- als de chronometer 1.34 aangeeft, moeten we een toonhoogte ergens tussen cis' en d'  aantreffen.

- als we op de chronometer een afstand van 10 seconden nemen, korrespondeert dat met een afgelegde toonhoogteafstand van een kleine septiem.

- als we dus een kleine septiem (= 10 kleine sekundes) in tien seconden afleggen, kunnen we de gemiddelde snelheid uitdrukken met behulp van

$$\frac{\textit{afgelegde toonhoogte afstand}}{\textit{afgelegde hoeveelheid tijd}} = \frac{10}{10} = 1 \textit{ kleine sekunde per sec.}$$

1.1.3. Onze tweede sprong gaat in feite naar "het uitdrukken van toonhoogte als funktie van de tijd". In plaats van onze x uit de voorgaande voorbeelden gebruiken we nu t voor tijd in seconden. De uitdrukking wordt dan $f(t) = t$, i.p.v. $f(x) = x$, met dezelfde set van definities als bij (3).

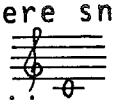
Nu willen we de snelheid ook kunnen vernaderen; Stel dat we het glissando 2 x zo snel willen, dan wordt de uitdrukking

$$f(t) = 2t$$

We zien dat de formule nu gegeneraliseerd kan worden tot

$$f(t) = pt$$

waarin op de plaats van p de snelheid aangegeven wordt. In de grafiek is dat de helling (de schuinte) van de lijn: naarmate p groter is loopt de lijn schuiner omhoog en de snelheid is hoger.

Nog één enkele verandering willen we kunnen aanbrengen met onze Temporele Algebra. Stel dat we uitgaan van een zekere snelheid pt, dan willen we bv dat op tijdstip $t = 0$ niet c'=  klinkt, maar d'= en tegelijkertijd niet genoodzaakt zijn om aan de definities te 'knoeien'. We zien dat d' ten opzichte van c' 2 plaatsen verder ligt op de toonhoogteschaal = y. Deze waarneming kan direkt in de formule opgenomen worden, immers, het glissando zal nu op *alle* tijdstippen 2 plaatsen verder = 2 kleine sekundes hoger liggen. De uitdrukking wordt dan, voor een glissando met snelheid $2t$:

$$f(t) = 2t + 2$$

De algemene en volledige vorm van de lineaire funktie wordt dus

(4) $f(t) = pt + q$

Ter illustratie nog het volgende voorbeeld. Ons oorspronkelijke glissando (3) werd uitgebeeld door $f(t) = t$. De toonhoogteschaal steeg even snel als de tijdsschaal naar rechts ging, dus $p = 1$; de nul van de toonhoogteschaal, vastgesteld op c', viel samen met de nul van de tijdsschaal, dus $q = 0$. Derhalve krijgen we, als we dit invullen in de gegeneraliseerde vorm van de funktie (4):

$$f(t) = 1.t + 0 = t$$

NB 1). De techniese en algebraiese standaarduitdrukking voor snelheid is een afgeleide van de afstand/tijdsfunktie (onze formule hierboven) en wordt uitgedrukt met

$$V = \frac{ds}{dt} \qquad \text{waarin } V = \textit{snelheid}, \quad s = \textit{afgelegde afstand}$$

Deze uitdrukking hebben we, ondanks het gebruik dat Xenakis er van maakt in zijn teksten, voor ons doel niet nodig, omdat we in onze beschouwingen alleen met konstante snelheden (= lineaire funkties) te maken krijgen waar $V = p$ in alle gevallen.

NB 2). Ook zullen we onsniet bezig houden met andere dan één-opéén afbeeldingen , omdat ze in het algemeen geen rol spelen in de komende uiteenzettingen. Alleen bij de Markov-processen komt het begrip, zij het in een andere betekenis, nog even aan de orde.

1.1.4. In onze uiteenzetting tot zover moet al duidelijk blijken, dat geen formalisatie het kan stellen zonder bijlevering van een set definities over interpretatie én toepassing van 'formules' of uitdrukkingen in die taal. Dat geldt evenzeer voor de numerieke/mathematiese taal, als voor bv het notenschrift: niemand kan deze toepassen of lezen als de regels (= definities) niet bijgeleverd worden. Zo zien we bv dat de formule

$$f(x) = x$$

op drie manieren begrepen kon worden, afhankelijk van de bijgaande definities = het erbij behorende begripsmodel.
Een ander voorbeeld. Stel dat we de getallen 1,2,3,...etc verbinden aan intervalgrootten bv kl sek, gr sek, kl terts etc, maar ook aan instrumenten bv viool, altviool, cello,...etc. We weten dan dat in het eerste geval de operatie 'optellen' zin heeft, immers

$$\left[\begin{array}{lllll} \text{kl sek} & + \text{ gr sek} & + \text{ kl terts} & = \text{ tritonus} \\ 1 & + 2 & + 3 & = 6 \end{array}\right.$$

In het geval van de instrumenten leidt optellen tot niets, immers

$$\left[\begin{array}{lllll} \text{viool} & + \text{ altviool} & + \text{ cello} & \neq \text{ trompet} \\ 1 & + 2 & + 3 & \neq 6 \end{array}\right.$$

In het laatste geval hebben de getallen, of heeft de afbeelding een andere funktie, nl *klassen* van instrumenten van elkaar te onderscheiden, op dezelfde manier als we door middel van die woorden (konsepten) doen. Bijvoorbeeld

$$\left[\begin{array}{lll} \text{viool} & \neq \text{ altviool} & \neq \text{ trompet} \\ 1 & \neq 2 & \neq 6 \end{array}\right.$$

of juist

$$\left[\begin{array}{ll} \text{fluit} & = \text{ fluit} \\ 10 & = 10 \end{array}\right.$$

In de *Statistiek*, waar we ons in de komende hoofdstukken uitvoeriger mee moeten bezig houden, is men, door de heterogene aard van de toepassingsgebieden, gedwongen, zich *precies* rekenschap te geven van de *aard* van de metingen die worden verricht op de onderzochte of beschreven verschijnselen. Vier soorten metingen worden daar onderscheiden, opklimmend in *sterkte:*

1. *De nominale of klassifikatoriese schaal.*

Deze wordt gehanteerd voor metingen op het 'zwakste' niveau, wanneer getallen of symbolen worden benut om objekten, personen of eigenschappen slechts te klassificeren. De enige erbij betrokken relatie is die van de ekwivalentie:

viool = viool

viool ≠ trompet

arco sul pont ≠ flatterzunge

De ekwivalentie relatie is reflexief, symmetries en transitief.

Reflexief: viool = viool (klasse consistentie)

Symmetries: viool ≠ trompet, en trompet ≠ viool

Transitief: viool = strijkinstr.

strijkinstr ≠ blaasinstr.

dus: viool ≠ blaasinstr.

2. *De ordinale of rangorde schaal.*

a. Wanneer in een nominale schaal nog de relatie > ('groter dan' of 'hoger dan' etc) geldt tusen sommige, maar niet noodzakelijk alle klasseparen, hebben we een *gedeeltelijk geordende verzameling*. Bijvoorbeeld de verzameling {1 trompet, 2 hoorns, 3 tuba's} kan uitgedrukt worden als

trompet > hoorn > tuba

dwz trompet is hoger dan hoorn is hoger dan tuba. Ook

1 trp > 2 hrn > 3 tu

Maar deze relatie geldt niet voor hoorn 1 en 2, want

hoorn 1 = hoorn 2

Daarom is deze verzameling *gedeeltelijk (partieel) geordend.*

b. Als de relatie > voor alle klasseparen geldt zodat een komplete rangordening ontstaat, hebben we een *goed geordende verzameling*. Bijvoorbeeld

trompet > klarinet > blokfluit etc

dwz een trompet is harder dan een klarinet, die weer harder is dan een blokfluit.

Als we dus niet met getallen willen werken, bv omdat we het preciese onderscheid toch niet kunnen uitdrukken, kunnen we altijd nog met andere symbolen werken en schrijven

$A > B > C$ *etc.*

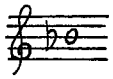
met nauwkeurig behoud van de gewenste onderscheidingen (> = harder dan).

De ordinale schaal bezit de ekwivalentie relatie uit de nominale schaal (nl binnen elke klasse), maar de relatie $>$ ('groter dan') is irreflexief, asymmetries, ofschoon wel transitief:

trompet $>$ klarinet
klarinet $>$ blokfluit
dan: trompet $>$ blokfluit

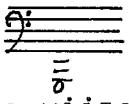
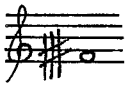
afgekort: $\left.\begin{array}{l} A > B \\ B > C \end{array}\right\} A > C$

3. *De intervalschaal.*

Als een schaal alle karakteristieken van de ordinale bezit, maar daarenboven nog de eigenschap dat alle afstanden of ontervallen tussen twee willekeurige grootheden gemeten kunnen worden vanuit één grondeenheid (de meeteenheid) uitgedrukt in een reëel getal, spreken we van een intervalschaal. Die meeteenheid kan van alles zijn en de positie van het nulpunt is arbitrair. Bijvoorbeeld is hoger dan is hoger dan 

(a)	*50*	$>$	*41*	$>$ *39*
(b)	*29*	$>$	*11*	$>$ *7*

Maar $(50 - 41 = 9) \equiv (29 - 11 = 18)$ (congruentie)
en $(41 - 39 = 2) \equiv (11 - 7 = 4)$

dwz de intervallen staan vast, immers de meeteenheid is de kleine sekunde = 1 in (a) en de kwartsekunde = 1 in (b). In (a) ligt de nul op  en in (b) op 

Op dezelfde wijze als de Celsius schaal van die van Fahrenheit verschilt: de nul ligt op beide schalen ergens anders en de intervallen zijn verschillend. Binnen de afzonderlijke schalen staat de meeteenheid echter vast, zodat de schalen in elkaar omgerekend kunnen worden met behulp van een standaard formule

$C = pF + q$ (een lineaire relatie!)

4. *De ratio-schaal.*

Deze rekent op het 'sterkste' niveau en is isomorf met de aritmetiese struktuur van de getallen die bij de meting gebruikt worden: optellen, aftrekken, delen, vermenigvuldigen, machtsverheffen, logaritmeneming etc zijn van toepassing op de verschijnselen. Bijvoorbeeld:

(a) oktaaf - kwint = kwart
of: *12* - *7* = *5* (kl sek = 1)
of: *24* - *14* = *10* ($\frac{1}{4}$ sek = 1)

(b) 3 x kwart = kleine deciem

3 x 5 = 15

(c) Kwint gedeeld door 3 = grote sek + $\frac{1}{3}$ sek

$\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ $= 2\frac{1}{3}$

(d) kl terts - gr terts = negatieve kl sek

3 - 4 = -1

etc

Er is boverndien een absolute nul, want elk interval i - i = 0.

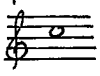
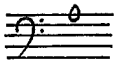
1.1.5. Van de hypothesen die aan Xenakis' formalisatie methode (en de uiteindelijke axiomatisering ervan) ten grondslag liggen, noemt hij onder meer een serie eigenschappen die wij in een geluid kunnen onderscheiden: toonhoogte, duur, luidheid,ruwheid, mate van verandering, kleur, timbre, dichtheid, mate van orde of wanorde. De eerste drie uit dit rijtje kunnen zelfs in termen van intervallen worden uitgedrukt (toonhoogte-, tijds- en geluidsterkte intervallen).

Als we ons even beperken tot de op dit ogenblik gemakkelijkst toegankelijke aspekten tw toonhoogte, duur (en ritme),geluidssterkte en timbre, kunnen we de specifieke *formalisatie niveau's* waaraan Xenakis gesleuteld heeft, globaal als volgt samenvatten:

I. TOONHOOGTE.

a.i. Absolute toonhoogte; bv 440 Hz = = 0.

Ten opzichte van die toon zijn alle andere tonen bv genummerd met de kl sek als standaard interval (toetsen van de piano).

Dus bv  = 3 en  = -12

ii. Relatieve toonhoogte; bv a' > g' ≡ 0 > -2

b.i. Absolute intervalgrootte; bv

$\left.\begin{array}{l}\text{1 kl sek} = 1\\ \text{2 kl sek} = 2\end{array}\right\}$ a'-g'= 0 - (-2) = 2

ii. Relatieve intervalgrootte; bv

(kl terts < kwint) ≡ (3 < 7)

c. Registers i. bv Hoog > midden > Laag

ii. Register breedte.

d. Toonhoogte/intervalroosters;

i. Velden, uitgaande van de totale'voorraad' toonhoogten

in een gegeven stuk, met behulp van bv stochastiese toonhoogte sturingen geaktualiseerd.

ii. Roosters, uitgaande van een basis interval (ELD = elementary displacement) gekonstrueerd met behulp van restklasse operaties

e. Kontinue toonhoogte veranderingen (het glissande als uitgangspunt) vs diskontinue

NB[4)] Xenakis heeft merkwaardigerwijs 'samenklank' nergens als zelfstandige parameter behandeld. In zijn 'New Proposals in Microsound Structure' lijkt het alsof zijn opvattingen over timbre dit begrip geheel vervangen (FM p.243).

II. RITME (duur)

a. Tijdsintervallen tussen gebeurtenissen;

i. Absolute en relatieve intervallen (cf toonhoogte)

ii. Tijdsintervallen, uitgedrukt vanuit dichtheids konsepten, uitgaande van een gemiddelde hoeveelheid gebeurtenissen per tijdseenheid

b. Toonlengten (duur op het niveau van de afzonderlijke klanken). Ook hier absolute en relatieve duren.

III. GELUIDSSTERKTE.

a.i. Absolute sterkte*graden* bv 0 = o dB = stilte
1 = 10 dB = *ppp*
2 = 20 dB = *pp*
.....

ii. Relatieve sterkte*graden* bv $f > p \equiv 6 > 3$

b. Relatieve en absolute sterkte *intervallen* (cf toonhoogte)

c. 'Voorraaden' sterktegraden en dynamiese vormen waarvan de afzonderlijke elementen bv stochasties over een 'voorraad' toonhoogten gedistribueerd worden.
Onder dynamiese vormen kan men bv de volgende 'typen' rangschikken:

1) $x_i = x_j$ — $i=j$ waar x een of andere
2) $x_i < x_j$ — $i \neq j$ sterktegraad voorstelt
3) $x_i > x_j$ — (*pp, p, mp, mf,...*)
4) $x_i < x_j > x_i$
5) $x_i < x_j > x_k$ — $i \neq j \neq k$
6) $x_i > x_j < x_i$
7) $x_i > x_j < x_k$

Een uitgewerkte lijst kan op grond van deze typen een enorme omvang aannemen. (als voor de x_i sterktegraden worden ingevuld).

IV. TIMBRE.

a. Instrumenten, genummerd volgens nominale schaal (zie 1.1.4. par 1)

b. Speelmanieren (artikulatie vormen) eveneens geklassificeerd op nominale schaal

c. Instrumenten én speelmanieren bij elkaar in één timbreklassifikatie, bv arco normale
glissando tremolo
fluit + klarinet
trompet + hoorn flatterzunge
slagwerk (hout)
slagwerk (doorklinkend metaal)
etc

d. "New Proposals in Microsound Structure" (FM p.242 e.v.) Zie vooral voetnoten 4 en 5.

1.1.6. De vraag wanneer en hoe Xenakis welke van de aspekten toepast, hangt ten nauwste samen met een chronologiese ontwikkeling van zijn kompositie methoden, en niet zozeer met een systematiese fundering van de theoretiese implikaties. Xenakis is op de eerste plaats komponist en in die kwaliteit vindt hij voortdurend nieuwe dingen uit: eenmaal gemaakte, en naar ik aanneem, beluisterde uitvoeringen van komposities, daarnaast ook evaluaties van en ontdekkingen in de gebruikte procédés, brengen hem op nieuwe ideeën, die dan waarschijnlijk weer toegepast worden, etc. Bij de bespreking van een aantal van die stadia in zijn ontwikkeling zullen we vanzelf met de toepassingen in aanraking komen.

1.2.0. Hoe worden de verschillende aspekten van geluid nu met elkaar inverband gebracht?

In het algemeen definieert Xenakis het tegelijkertijd wederzijds beinvloeden van bv de aspekten toonhoogte, timbre, geluidsterkte en duur als een VEKTOR. Strikt genomen wordt geluid = timbre, gedefinieerd door de drie eigenschappen toonhoogte, geluidsterkte en duur. Ook als een geluid samengesteld of komplex is. Immers in dat geval kunnen we de samenstelling analyseren (en omgekeerd: synthetiseren) als een veelheid van toonhoogten allen met een eigen sterkteverloop en door. Dit analytiese standpunt is voor kompositie doeleinden ongeschikt, omdat we altijd moeten werken met een instrumentarium van, zo goed en zo kwaad als het gaat, onderscheiden instrumenten of timbres. We zullen zien dat Xenakis zich echter ook met klanksynthese bezig houdt (zie 1.4.0.)

Wat is een vektor?

Een vektor is een punt (al of niet bewegend) in een of andere 'ruimte', dat door de afzonderlijke dimensies van die ruimte gedefinieerd wordt.

Een punt op een lijn (= 1 dimensie) kan gedefinieerd worden door een getal x uit een schaal die op die lijn is aangebracht. Bv $x = 4.73$.

Een punt op een vlak (= 2-dimensionaal) kan gedefinieerd worden als een positie op de beide dimensies van het vlak, wat voor schalen daarop ook aangebracht zijn. Bv $x = (1,15)$ of $x = (trompet, fortissimo)$. In dit laatste geval staan timbres op de eerste coördinaat, en sterktegraden op de tweede.

Een punt in een driedimensionale ruimte, voor te stellen als een positie in bv een kubus, kan voorgesteld worden aan de hand van de drie richtingscoördinaten van die ruimte:

a. omhoog (omlaag)
b. links (rechts)
c. naar voor (naar achter)

Een punt in een vier- en meerdimensionale ruimte... Een grafiese weergave is nu problematies, evenals trouwens ons voorstellingsvermogen in termen van geometriese ruimten. We doen er daarom goed aan meteen maar te wennen aan niet-geometriese 'ruimten', zoals in het voorbeeld van de vektor

x = *(trompet, fortissimo)*

noodzakelijk is. Een geometriese voorstelling kan een hulpmiddel zijn bij het aanleggen van een bepaalde begripsroutine. Zo is de driedimensionale kubus een handige ruimte om bv aan te tonen dat, binnen de grenzen van die ruimte, een punt vanuit een positie $(x,y,z,)$ op *alle* mogelijke manieren verplaatst kan worden, dwz in *alle* richtingen. Op het niveau van de vektornotatie betekent dit, dat elke komponent, *onafhankelijk* van de andere komponenten, veranderen kan binnen de grenzen van zijn domein. (in de betreffende ruimte korrespondeert dat met evenzovele vernaderingen van de 'positie' van zo'n punt.) Is het domein van één vektorkomponent, zeg X, de kontinue verzameling van de reële getallen (R), dan betekent dit, dat een punt in deze 'richting' net zoveel posities kan innemen als er reële getallen in het domein zijn (i.e. oneindig veel). *Tegelijkertijd* kan een andere komponent, bv Y, beperkingen opleggen in *zijn* richting, bv als het domein van Y de rij van de hele getallen is: in deze richting kan het punt dan alleen sprongsgewijs (van getal tot getal) van positie veranderen. Enzovoort.

1.2.1. De genoemde vier muzikale eigenschappen (komponenten) kunnen elk als zo'n 'richting' of 'dimensie' van geluid opgevat worden, die dan de 'positie' of 'aard' van een specifiek geluid (een punt in de geluidsruimte) bepalen en kunnen veranderen. In het algemeen gesproken kan het geluid van een klank uit bv een klassiek orkest door een vierdimensionale vektorruimte weergegeven worden:

$$E_r(t, h, s, d)$$

waar t = timbre of instrumentale familie
h = toonhoogte
s = sterkte of dynamiese vorm
d = duur

Een 'punt' (klank) in deze ruimte is bv
(viool arco, c', ff, ¼ seconde) =
$(t_i \quad , h_j, s_k, d_l \quad)$

i, j, k en l zijn dan bepaalde'waarden' uit de specifieke voorraad, het domein, van de betreffende koördinaat = parameter. Als in de 'voorraad' binnen elk domein nu een bepaalde volgorde

is aangebracht bv van links naar rechts, kunnen we deze als een schaal voorstellen. Stel dat op elk van die vier schalen een verschuifbare indicator staat, die verschuift volgens de 'normen' van de betreffende schaal, dan kan men zich voorstellen dat *alle* verschillende standen van de vier schuifindicators korresponderen met evenzovele orkestklanken, in geometriese begrippen: de snijpunten van alle loodlijnen uit alle schuifstanden.

1.2.2. Xenakis beschreef dit vektorkonsept al in de vijftiger jaren. In de zestiger jaren komt hij erop terug en waagt zich een paar bladzijden lang aan de opbouw van een axiomatiese grondslag voor deze konstruktie. (FM p 155 e.v.) Om deze monografie beknopt te houden, zullen we hier alleen een samenvatting geven, uitgaande van het hierboven gestelde, dat naar onze mening van kracht blijft, zij het met een paar kleine begripsveranderingen[5].

i. Een klank, in bovenstaande zin omschreven, kan nu gemakkelijk als een 'identiteit' geidentificeerd worden: noem zo'n klank a, voorgesteld door een vektor

$$a = (t_i, h_j, s_k, d_l)$$

Deze kan, los van de tijd gezien, als 'identiteit' in een logiese redenering worden opgenomen, die alleen de volgende eigenschappen honoreert:

$$a \vee a \vee a \ldots \vee a = a \qquad \text{(reflexiviteit)}$$

v is een logiese operator die alleen maar dingen naast elkaar zet (disjunktie).

ii. Deze klank a wordt echter ook geidentificeerd in vergelijking tot andere klanken, die immers van a verschillen door een andere uitdrukking in één of meerdere van de vektorkomponenten. Neem bv a en b.

$$a = (t_i, h_j, s_k, d_l)$$

$b = (t_i, h_m, s_n, d_l)$ Daaruit volgt dat $a \neq b$, want b verschilt nu van a in h en in s ($j \neq m$ en $k \neq n$). De logiese redenering die hier rekenschap van geeft, luidt:

$$a \vee b = b \vee a \qquad \text{(commutativiteit)}$$

dwz hoe we deze klanken ook naast elkaar zetten, het onderscheid blijft geldig.

iii. Een uitbreiding hiervan is de kombinatie van 3 of meer onderscheiden klanken bv het koppel $a \vee b$ in kombinatie met een derde, c:

$$(a \vee b) \vee c$$

Hiervoor geldt weer precies hetzelfde, en bovendien

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad \text{(associativiteit)}$$

iv. In-de-tijd geredeneerd moeten we een andere onderscheideing maken:

$$a \Rightarrow b \neq b \Rightarrow a$$ [6)]

hetgeen betekent: "a gevolgd door b" is niet hetzelfde als "b gevolgd door a". Maw in de tijd geldt geen commutativiteit. De tijd is a-symmetries. Maar, aldus Xenakis, zolang we in het kompositieproces een fase toelaten van prefabrikage van materiaal en kombinaties daarvan, kunnen we met de tijd werken als een metriese komponent, waarin zowel associativiteit als commutativiteit gelden: [7)]

$$a \Rightarrow b = b \Rightarrow a$$

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c = a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$$

1.2.3. PARENTHESE.

Merk op, dat we nu bezig zijn met een grondslag te formuleren voor de strikt formele behandeling van het muzikale materiaal: de formalisatie wordt door Xenakis 'gemotiveerd', zoveel mogelijk op een wijze die naar wetenschappelijk maatstaven geldigheid kan opeisen. De 'motivaties' die hier aangevoerd worden, zijn isomorf met die, waarop de axiomatiek van de getalsystemen gegrondvest is (bv de stellingen van Peano met het induktietheorema, cf AYRES 1965, hfdst 3 en 4, maar vooral HALMOS 1960, hfdst 12). We gaan deze axiomatiek niet uiteenzetten hier, om beknoptheidsoverwegingen; we vatten alleen de belangrijkste stellingen eruit samen voor de kennismaking, zoals gezegd.

1.2.4. We bespraken in 1.2.2. (muzikale) elementen. "op een primair niveau nemen we toonhoogte, duur, timbre en eventueel ook nog attack, geaccidenteerdheid e.d. waar. Op een ander niveau zouden we komplexiteit, graden van orde/wanorde, variabiliteit, dichtheid, homogeniteit/heterogeniteit, fluktuaties enz kunnen waarnemen." (FM p. 157/158)

Mět Xenakis laten we dit oerwoud van beschrijvingswijzen terzijde, omdat de redeneringen die volgen ook daarop van toepassing zijn, met incidentele aanpassingen op onderdelen en bijkomstige aspekten. Op sommige daarvan komen we later terug.
Voor het onderscheiden van een *intervalgrootte* zijn drie muzikale elementen noodzakelijk, *a, b en c*. We definieren nu een binaire relatie S = 'groter dan of gelijk aan'
h_a, h_b, h_c zijn drie toonhoogte intervallen. Dan gelden:

i. $h \; S \; h$ voor alle $h \in H$ (reflexiviteit)

ii. $h_a \; S \; h_b \neq h_b \; S \; h_a$ tenzij $a = b$ (antisymmetrie)

iii. $h_a \; S \; h_b$ en $h_b \; S \; h_c$, dan ook $h_a \; S \; h_c$ (transitiviteit)

Voor zowel toonhoogte als geluidsterkte en duur gelden deze axioma's op het niveau van *'intervallen-als-afstanden'*. Immers een sterkte interval van bv 50 dB tussen twee sterktegraden in, en een tijdsinterval dat het *verschil* aangeeft tussen twee duren, hebben deze eigenschappen met een interval, dat de êne toonhoogte van de ander scheidt, gemeen.[8)]

1.2.5. Omdat Xenakis A gezegd heeft, namelijk elementen gedefinieerd heeft op de wijze van getaldefinities, moet hij ook B zeggen en de interne kompositiewetten van de systemen waarin die getallen funktioneren, opstellen. Dat doet hij als volgt:

i. Als we een willekeurig interval a optellen bij een willekeurig ander interval b, ontstaat een interval c dat in hetzelfde systeem H thuishoort:

$$a + b = c \qquad a, b, \text{ en } c \in H$$

ii. Verder

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \quad \text{(assoc.)}$$

iii. Er is ook een nul-interval (de prime) met de eigenschap:

$$a + 0 = a \qquad \text{(neutraal element)}$$

iv. $$a + (-a) = 0 \qquad \text{(inverse)}$$

dwz elk element heeft een inverse; een interval (verplaatsing) in een bepaalde richting kan opgeheven worden door het interval in tegengestelde richting in te schakelen, zodat de uitgangspositie weer bereikt wordt.

v. $$a + b = b + a \qquad \text{(commutativiteit)}$$

Deze 5 axioma's zijn karakteristiek voor een zogenaamde Abelse Groeps-struktuur met betrekking tot optelling: zij zijn van

toepassing op bv de rij van de hele getallen en in dat opzicht (dwz alleen voor zover het de toepassing van dêze en geen andere axioma's betreft) is deze rij een Abelse Groep, zo genoemd naar de Noorse wiskundige Abel (1802 - 1829!) wiens naam in dit verband alleen met axioma 5 verbonden is: de commutativiteit. Sommige groepen zijn namelijk niet-commutatief.[9)]

1.2.6. Xenakis konstrueert nu ook vektoren voor de komponenten toonhoogte-intervallen, sterkte-intervallen en tijdsintervallen. Deze moeten worden onderscheiden van de vektoren zoals beschreven in 1.2.1 p. 17, die niet de intervallen, maar de komponenten beschreven *waartussen* de 'intervallen' worden gerealiseerd. Opnieuw somt hij, nu voor de vektor in zijn geheel, de eigenschappen op die het systeem van operaties beschrijven, dat op de vektoren van toepassing is:

i. Een *interne* kompositie-wet:

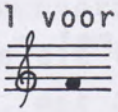
Om geen verwarring te zaaien met zoveel verschillende notaties, gaan we weer uit van de vektorsymbolen uit 1.2.1, nu evenwel met weglating van de komponent timbre, om reeds genoemde redenen, en met de uitdrukkelijke kanttekening, dat we nu over *intervallen* praten.

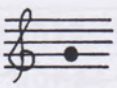
$$\bar{a} = (h_1, s_1, d_1)$$

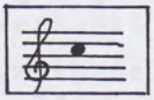
$$\bar{b} = (h_2, s_2, d_2)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = ((h_1 + h_2), (s_1 + s_2), (d_1 + d_2)).$$

Dat is de regel voor optelling van vektoren. Voorbeeld: Stel

dat $h_1 = 5 =$  omdat bv c'= 0 en de eenheid is een kleine sekunde

$h_2 = 7 =$ 

$h_1 + h_2 = 5 + 7 = 12$, *dat is* 

$d_1 = 5$ met de nul vastgesteld op 10 ♪ dus $d_1 = 15$ ♪ (5 posities rechts van 10 ♪)

$d_2 = -1$ dus $d_2 = 9$ ♪ (nl 1 positie links van de nul, die 10 ♪ is)

$d_1 + d_2 = 5 + (-1) = 4$, dat is $\boxed{14 ♪}$

$s_1 = -3$ met 10 dB als eenheid en 50 dB = 0 op de sterkteschaal = *mf*

dus $s_1 = pp$

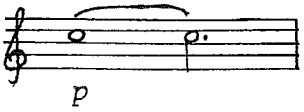
$s_2 = 1$ $\qquad$ $s_2 = 1$ positie rechts van $mf = f$

$= 60$ dB

$s_1 + s_2 = (-3) + 1 = -2$, *dat is* $\boxed{p}$

Dus $\bar{a} + \bar{b} = ((5 + 7), (1 - 3), (5 - 1))$

$= (12, -2, 4) = ($ $, p, 14\,♪)$

$=$ 

NB 1) Merk op dat het hier uitsluitend om een verantwoording gaat van het inwendige systeem van het vektorkonsept.

NB 2) De nul (oorsprong) op de schaal van elke komponent is zó gekozen, dat optelling tot waarden aan weerszijden ervan (onder nul, en boven nul) kan leiden. Bv

pp	*p*	*mp*	*mf*	*f*	*ff*	*fff*
-3	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*

Verder gelden weer commutativiteit, associativiteit, en is er een inverse, een nul-vektor, en een unieke vektor $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, zodat $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$.

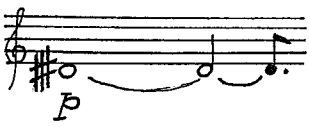
ii. Een *externe* kompositie-wet.

Een vektor kan in z'n geheel vermenigvuldigd worden met een zgn scalar, $p \in \mathbb{R}$, dwz een reëel getal dat de vektor in z'n geheel beinvloedt

$$p\bar{a} = (ph, ps, pd)$$

Dus de vektor $\bar{a} = (5, 5, -3)$ wordt met $p = \frac{2}{3}$

$$\tfrac{2}{3}\bar{a} = (\tfrac{2}{3}.5, \tfrac{2}{3}.5, \tfrac{2}{3}.-3)$$

$= (3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, -2) =$ 

Hier gelden:

$1.\bar{a} = \bar{a}$ $\qquad$ (1 = eenheid)

$p(q\bar{a}) = (pq)\bar{a}$ $\qquad$ (associativiteit)

$(p + q)\bar{a} = p\bar{a} + q\bar{a}$

$p(\bar{a} + \bar{b}) = p\bar{a} + p\bar{b}$ $\qquad$ (distributiviteit)

Maw een aantal eigenschappen voor vermenigvuldiging van een vektor met een zogenaamde scalar, die een reëel getal is, zijn identiek aan vermenigvuldiging van bv hele getallen. Een vektor kan dus in veel opzichten als een of ander getal behandeld worden, zoals we nu al voor optelling en vermenigvuldiging gezien

hebben.

iii. Er bestaan, in het geval dat de vektor uit n komponenten bestaat, n zgn eenheidsvektoren. In ons geval 3. Deze vektoren schakelen alle komponenten als het ware uit op één na. Zo hebben we de vektoren

$$\bar{o}_1 = (0,\ 0,\ 1)$$
$$\bar{o}_2 = (0,\ 1,\ 0)$$
$$\bar{o}_3 = (1,\ 0,\ 0)$$

die als volgt op de normale vektoren opereren:

$$\bar{o}_1\bar{a} = (0.h,\ o.s,\ 1.d) = (0,\ 0,\ d)$$
$$\bar{o}_2\bar{a} = (o.h,\ 1.s,\ 0.d) = (0,\ s,\ 0)$$
$$\bar{o}_3\bar{a} = (1.h,\ 0.s,\ 0.d) = (h,\ 0,\ 0)$$

1.2.7. Samengevat (FM p. 162):

1) Elke klank kan uitgedrukt worden als een vektor.

2) Er is maar één basis nl. h, s *en* d.

Elke andere kwaliteit van geluiden zou geanaliseerd moeten worden als een lineaire kombinatie van deze drie eenheidsvektoren, die driedimensionaal zijn.

3) De scalars p *en* q zullen in de praktijk niet alle waarden aannemen, omdat we dan buiten de grenzen van het hoorbare zouden treden. Maar deze beperking ontkracht allerminst de algemeenheid van de argumenten en hun toepassingen.[10)]

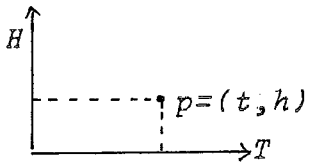
Tot zover een overzicht van Xenakis' poging tot axiomatisatie van de wiskunde die hij gebruikt voor de behandeling van het klankmateriaal, met behulp waarvan hij probeert zo nauwkeurig mogelijk rekenschap te geven van de fysiologiese werkelijkheid die beschreven wordt en het rekenwerk dat kan (mag) worden verricht met de gekozen beschrijvingsmethode, de formalisatie. Xenakis maakt het samenvatten overigens niet gemakkelijk. Bij verschillende gelegenheden roert hij andere aspekten van de materie aan, meestal met de bedoeling weer een andere produktiemachine op gang te brengen voor een nieuw stuk, en de toepassing van nieuwe technieken te verantwoorden.

1.2.8. PARENTHESE

In het kort maken we nog even melding van een tamelijk vanzelfsprekende uiteenzetting van Xenakis over muzikale notatie- en koderingsmethoden. Natuurlijk maken deze deel uit van het formalisatie vraagstuk, en, zoals we al opmerkten in 1.0.1, behoren ze tot de 'talen' waarin we muziek begrijpen, er konsepten over maken.

Voor computers is het vooralsnog onontbeerlijk problemen in getallen weer te geven (digitale input) ofschoon zogenaamde digital-to-analogue-converters een output in niet cijfermatige taal kunnen leveren. (Vgl o.a. de afbeeldingen in 1.4.2.) Van betekenis in de numerieke weergave van klanken en hun organisatie in-de-tijd (vooruitlopend op wat in komende hoofdstukken nog allemaal aan de orde komt) is de vaststelling dat het domein van de toonhoogten, van de geluidssterkten, de tijdstippen der gebeurtenissen, van dichtheidsgraden en van de graden van orde/wanorde (in termen van entropie - hierover later) allemaal in een één-op-één korrespondentie met de verzameling van de reele getallen $\mathbb{R}$ gebracht kunnen worden, grafies voorgesteld als een ononderbroken rechte lijn.

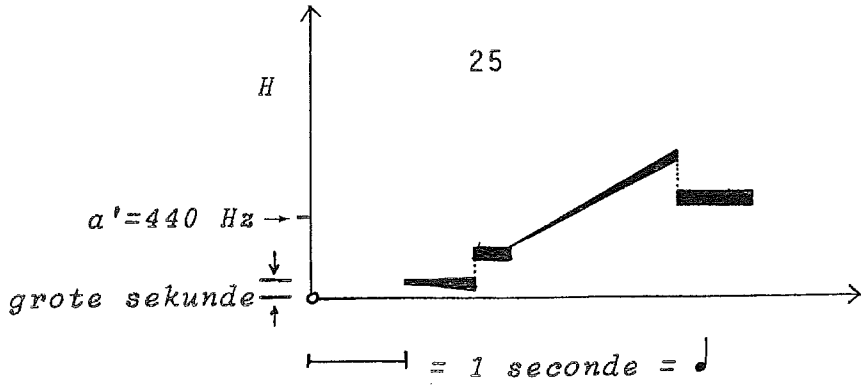
Aangezien geluid een samenstelling is van klankeigenschappen is het ook een samenstelsel van de ermee korresponderende assen, net als in de vektorweergave al ter sprake kwam. We zijn inmiddels dan ook al voorbereid op een grafiese weergave in een tweedimensionale ruimte, waarin punt p, op het snijpunt van loodlijnen uit de toonhoogte-as H en de tijds-as T, een geluid weergeeft met hoogte h en tijdstip t.



Ons klassiek notenschrift is een derde mogelijkheid in de rij vankoderingssystemen. Elk systeem heeft zijn eigen voor- en nadelen, afhankelijk van het doel waarvoor het gebruikt wordt. De weergave in het platte vlak kan voor de verbeelding van bepaalde komplexiteiten van groot nut zijn. In afb 3 staan een grafiese en numerieke beschrijvingswijze bij elkaar, waarin de dikte van de lijn de sterkte aangeeft (een derde dimensie!) de hoogte de toonhoogte, de breedte de tijd,

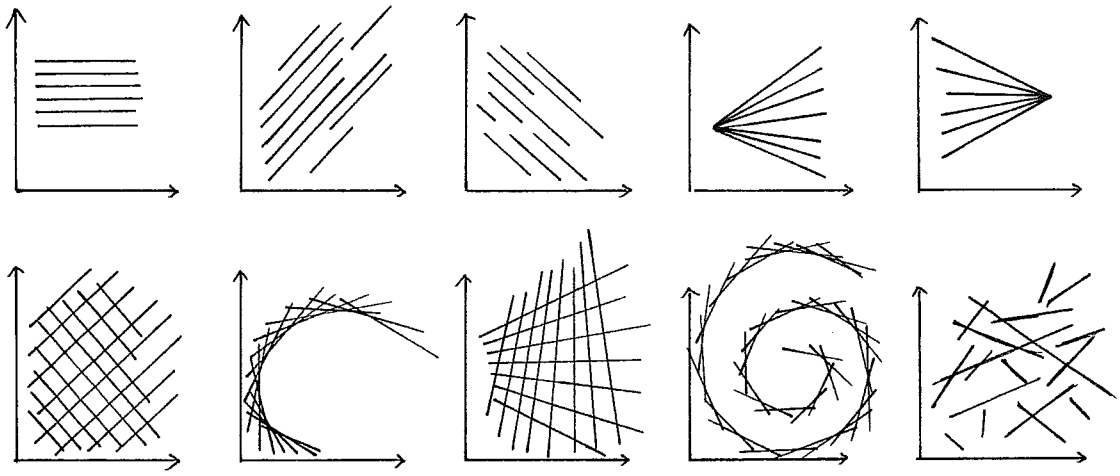
N = het nummer van de toon in lexicografiese volgorde
H = toonhoogte in kleine sekundes, met laagste toon = 0 en met H = 10 is ongeveer de a'= 440 Hz
V = schuinte van de lijn in kl sek/sec., positief indien stijgend, negatief indien dalend
D = duur in seconden
I = getallen die met bepaalde sterktegraden korresponderen.

Daaronder staan een tiental grafiekjes waarin Xenakis een opsomming geeft van een aantal elementaire regelvlakken die vaak model hebben gestaan voor makrostrukturele configuraties in zijn komposities. Hierover schrijft hij uitvoerig in 'Modulor 2' (Boulogne-Seine:Architecture d'Aujourd'hui, 1955) In deze afbeelding zijn ze met ononderbroken lijnen weergegeven (kontinue lijnen);dezelfde figuren kunnen met stippellijnen worden uitgebeeld (diskontinu).



(a)

N	T	H	V	D	I
1	1.00	1	0	0.66	3
2	1.66	6	0	0.33	5
3	2.00	6	+17.5	0.80	6
4	2.80	13	0	?	5



(b)

afb 3

Xenakis onderscheidt daarbij enkele algemene eigenschappen, waar variaties van kunnen samengaan met deze basis-typen:

1. Registers (midden, hoog etc)
2. Globale dichtheid (groot, klein orkest)
3. Globale geluidsterkte
4. Timbrevariatie (arco, sul ponticello, trémolo etc)
5. Schommelingen in bovengenoemde eigenschappen
6. Globale voortgang van een type (overgang naar andere basis-typen)
7. Mate van orde (berekend als in de zgn kinetiese theorie van de gassen;hier is grafiese weergave zeer handig)

In het algemeen geldt nog dat een menging van kontinue en diskontinue typen tot de mogelijkheden behoort.

1.3.0. Met het definieren en formaliseren van klankobjekten en de intervalstrukturen binnen hun drie voornaamste komponenten, zijn we nog maar enkele stappen dichterbij het komponeerproces gekomen. Immers nu rijzen de vragen met betrekking tot het kombineren en aaneenrijgen van klanken, hun organisatie op twee basisniveau's: ten eerste het niveau van de STRUKTUREN BUITEN DE TIJD[11)], dwz alle organisatie van het basisklankmateriaal in grotere systemen en strukturen, voorzover die geheel los staan van de wijze waarop het materiaal in de niet-omkeerbare en zich konstant voortplantende tijd geordend wordt. Tot deze systemen en strukturen kunnen bv toonhoogtesystemen gerekend worden. De traditionele konsepten majeur en mineur, modaal en polytonaal etc, zijn daar voorbeelden van. Ook moet hiertoe worden gerekend de inventaris van alle 'regels' waaraan de verbindingen en kombinaties van mikro- en makrostrukturele elementen onderworpen zijn. Ten tweede het niveau van de STRUKTUREN IN DE TIJD. Op dit niveau moeten alle beslissingen worden gereguleerd die een kompositie zijn uiteindelijke vormverloop in de tijd bepalen: de morfogenese van een stuk. Aangezien deze beslissingen bij Xenakis voortdurend samenhangen met zijn vernieuwingsdrang, vinden we, bijna met de regelmaat van een klok, telkens nieuwe 'oplossingen' voor de problemen die hij zich op dit niveau stelt. We zullen deze problemen in aparte hoofdstukken aan de orde stellen, en daarin zijn technieken in hun specifieke toepassingen de revu laten passeren. Die toepassingen hebben onvermijdelijke gevolgen voor de specifieke aanpak van de strukturen buiten-de-tijd. Het is daarom vrijwel onmogelijk de beide gebieden los van elkaar uiteen te zetten. De belangrijkste 'vorm-generatoren' zullen we daarom tegenkomen bij de behandeling van de kompositie-procédé's die ten grondslag liggen aan het ontstaan van een aantal daarvoor representatieve stukken.

Twee onderwerpen echter zijn nog duidelijk een uitvloeisel van de wijze waarop Xenakis de formalisatie van het klankmateriaal-sec heeft aangepakt. Beide hebben te maken met het 'timbre-aspekt' van geluid. Het zal u opgevallen zijn dat de timbre-komponent uit de vektorbeschrijving in 1.2.1.(p 17) verdwenen is. Deze vektor dateert uit de tijd van ACHORRIPSIS (1957)

en had daar een specifieke funktie (zie verder vanaf 3.3.0) zoals we zullen zien. De voetnoten 4 en 5 bevatten al toespelingen op de bijzondere wijze waarop Xenakis' interesse voor het klankmateriaal-op-zich, de variabiliteit en plasticiteit ervan voor mikro- zowel als makrostrukturele doeleinden, zich manifesteert in de vektorbeschrijving en de grote stochastiese processen die nog aan de orde zullen komen, met name in verband met het konsept 'samenklank'. We hebben daar al opgemerkt dat de vektor *(h,s,d)* de begrippen 'timbre' en tenslotte 'samenklank' overlappende betekenis hebben. Daardoor is de uitdrukking 'timbre-komponent van geluid' niet alleen misleidend, maar vooral tautologies.

We zullen evenwel zien dat voor kompositoriese doeleinden het traditionele gebruik van de onderscheiding 'timbre' welhaast onvermijdelijk is. Zelfs al is de klankbron een puur synthetiserende generator.

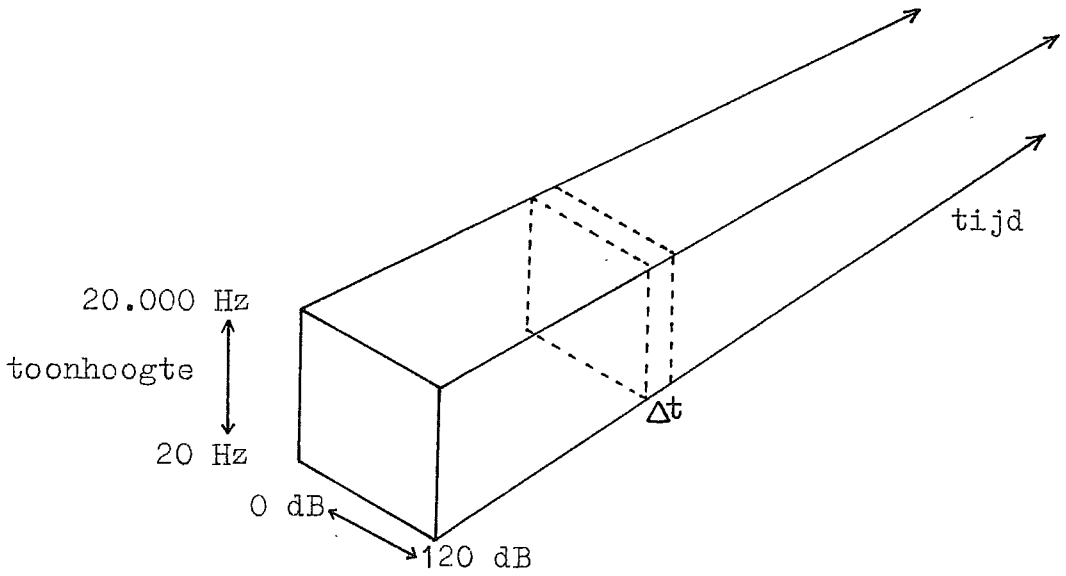
De twee onderwerpen betreffen een ontwerp voor de komposities ANALOGIQUE A en B, in tweede instantie ook voor SYRMOS, en een voorstel voor kunstmatige produktie, synthese en modulatie van mikro-klankstruktuur.

1.3.1. SCREENS (FM p. 43)

De opvatting die aan de konstruktie van de screens ('trames' in de franse uitgave; het nederlandse woord 'raster' is misschien het dichst bij een goede vertaling) ten grondslag ligt, is de hypothese dat "elke klank een integratie van korrels (grains) is, van elementaire klankdeeltjes, van klank-quanta". De quantum-theorie van de geluidsleer, om zo te zeggen. Elk van deze elementaire korrels heeft een drievoudige natuur: duur, hoogte en sterkte. Zelfs de kontinue klankvariatie wordt hierin opgevat als samenvoeging van een groot aantal elementaire korrels die op een bepaalde manier over de tijd uitgezet zijn. Deze korrels zijn pure sinusoide geluiden, die in hun oneindig korte levensduur nog kunnen varieren op alle drie aspekten. Xenakis gaat er vanuit, dat een klank vrijwel nooit een 'zuivere' klank is, maar dat deze zgn 'zuivere klank' opgevat dient te worden als een bijzonder geval binnen het veel algemenere verschijnsel klank, waarin oneindig veel korrels fluktueren in een

bepaald toonhoogtegebied of kombinatie van toonhoogtegebieden, ook als het een 'gewone klarinettoon' betreft. Als je nu de tijd opdeelt in zeer kleine sneetjes Δt van gelijke lengte, maar zo kort dat de samenvoeging ervan hetzelfde effekt van kontinuiteit heeft voor het oor als de 24 beeldjes per seconde op het filmdoek voor het oog hebben, dan kun je je geluid voorstellen als een snelle opeenvolging van 'geluidsbeeldjes' die allemaal van een bepaalde komplexe struktuur kunnen zijn, en zelfs in tegenstelling tot filmbeeldjes nog een verloop (vektor) in die Δt kunnen hebben.

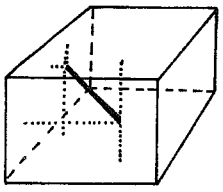
Onze vertrouwdheid met de vektornotatie, waarop een komplete algebra van toepassing is, die tegemoet komt aan de onlosmakelijkheid van de drie (of meer) komponenten, kan ons nu helpen bij de grafiese voorstelling die Xenakis bij dit idee levert. Stel de klankruimte voor als een driedimensionale holle balk. De lengte van de balk is de tijdsdimensie, de hoogte is de toonhoogte dimensie, begrenst door de hoorbaarheidsgrenzen, de breedte is de sterktedimensie van nul tot de pijngrens.



afb. 5

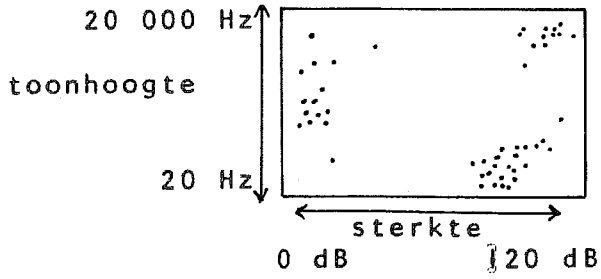
Elk geluidskontinuum, of het nu een Beethovensymfonie of een fabrieksinterieur of een stofzuiger is, kan nu voorgesteld worden door de specifieke positie die de elementaire deeltjes in die ruimte innemen. (zie ook 1.2.0). In de 'werkelijkheid'

kunnen die sinusoiden ook lijnen zijn, die een bepaalde 'richtingspositie' in die ruimte innemen. Immers een of andere *fluktuatie* in een kort tijdsgedeelte betekent bv dat de toonhoogte stijgt (de lijn loopt omhoog) en de toonsterkte tegelijkertijd afneemt (de lijn loopt niet alleen omhoog maar bovendien van rechts naar links, in de richting van 0 dB, tegelijk met in de richting van 20 000 Hz). In de kubus, die dat stukje tijd weergeeft, is dat een lijn die een of andere afwijking is van, parallel loopt of samenvalt met een ribbe of diagonaal, maw een diagonaloide of riboide.



afb. 6

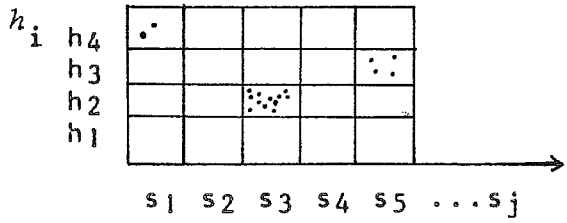
We kunnen ons nu voorstellen dat een geluidskontinuum wordt opgedeeld in zeer kleine plakjes Δt, in de orde van o.04 seconde bijvoorbeeld, en dat elk plakje de korrelsituatie van dat korte moment weergeeft. Aangezien we weer terugkeren naar de kompositoriese bruikbaarheid waar deze konseptie van geluid toe moet leiden, stappen we weer af van de diagonaloiden en riboiden, en doen alsof we met geluid hetzelfde kunnen als met filmbeelden. Bijvoorbeeld 25 plakjes per seconde worden nu 25 'bladzijden' per sec op Δt (= 0.04 sec) *afstand* van elkaar, elk weergevend de *situatie* van dat ondeelbare kleine moment. We kunnen ons geluid zó voorstellen als een boek waar 25 bladzijden per sec. van worden omgeslagen (in konstante snelheid). Op elke bladzij staan de korrels waarvan zowel toonhoogte als sterkte aangegevan worden door de positie die ze innemen binnen het vlak.



afb. 7

Aangezien dit nog altijd een tamelijk gecompliceerd koördinatenvlak is (het domein van beide komponenten is $\mathbb{R}$, dwz *alle* reële waarden tussen onder- en bovengrens) kunnen we omwille van de handelbaarheid beter diskrete waarden = diskrete schalen in-

voeren. De meest overzichtelijke en daarom makkelijkst regelbare toestand bereiken we, door het totale gebied op te delen in 'cellen' van gelijk oppervlak.

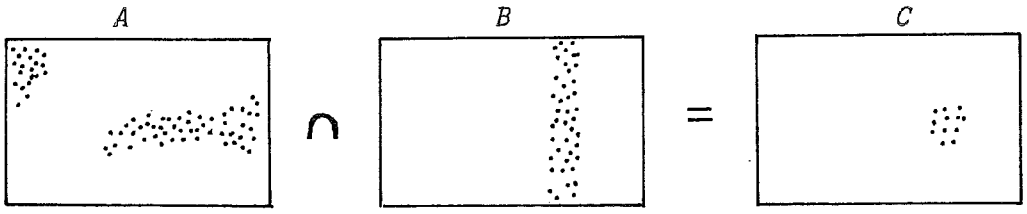


afb. 8

In afbeelding 8 is toonhoogte *h* onderverdeeld in gelijke gebieden (bv ter grootte van een oktaaf) en geluidsterkte eveneens (bv ter grootte van 10 dB). Elk vierkantje (in het vervolg 'cel' genaamd) wordt aangegeven met 2 koördinaten (h_i, s_j) waarin een bepaalde hoeveelheid korrels verspreid ligt. Bv in cel (h_4, s_1) zitten 2 korrels, in (h_2, s_3) 10, en in (h_3, s_5) 4. h_1 is het laagste oktaaf voor een gegeven instrumentarium, s_1 de zachste sterktegraad die gebruikt gaat worden. In cel (h_4, s_1) staan dus twee korrels die *ongeveer* even hoog (zeer hoog) en even zacht (zeer zacht) zijn.

1.3.2. De vraag: 'in welke cellen moeten hoeveel korrels', laten we nog even terzijde (zie 3.2.2), evenals de vraag hoe de screens aan elkaar geregen moeten worden.(zie 4.0.0 e.v.) De eerste vraag beantwoordt Xenakis namelijk vanuit een statisties standpunt, omdat het probleem, zoals het er nu voorstaat, een oplossing vraagt waarin hoge komplexiteitsgraden aangepakt moeten kunnen worden. Deze aanpak komt nog uitvoerig aan de orde. De tweede vraag wordt door Xenakis in de loop van zijn ontwikkeling op zeer verschillende manieren benaderd. Zij zullen, voor zover bekend, de revu passeren.

1.3.3. Xenakis doet evenwel een poging om een algebra voor de screens te ontwerpen. Een aantal elementaire operaties zijn daarin van toepassing. Zij stammen uit de verzamelingenleer en bieden de mogelijkheid om een koppeling tussen twee screens te laten resulteren in een nieuwe, derde screen. Deze operaties zijn
1) *Intersektie.* Twee screens die intersekteren, leveren een screen dat alleen gemeenschappelijke gebieden weergeeft:

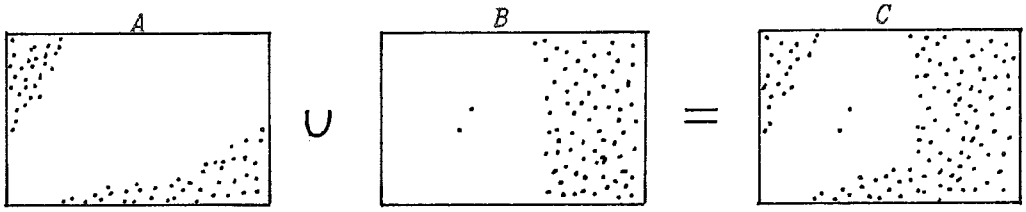


Notatie: $A \cap B = C$

NB als A en B niets gemeenschappelijks hebben, resulteert de intersektie in een zogenaamde lege verzameling. Notatie: $A \cap B = \emptyset$, ofwel $A \cap B = C$, $C = \emptyset$.

2) *Vereniging.*

De vereniging van twee screens levert een screen dat de elementen van beide screens bevat, met de restriktie, dat het overlappende gedeelte niet dubbel geteld wordt:

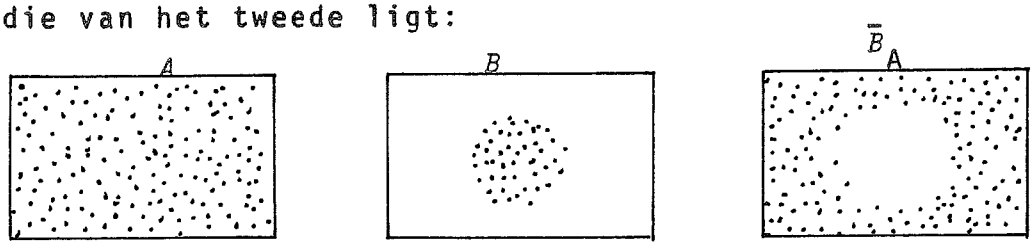


Notatie: $A \cup B = C$

NB $C = A + B - (A \cap B)$ geeft de restriktie weer zoals hierboven genoemd: vereniging is iets anders dan optelling!

3) *Complementariteit.*

De totale verzameling van het eerste screen voor zover dit buiten die van het tweede ligt:



Notatie: $\bar{B}_A = A - (A \cap B)$; ook wel $\bar{B}_A = A - B$.

dwz het complement van B ten opzichte van de verzameling A, is de verzameling A minus de intersektie van beide verzamelingen. (Xenakis' notatie: $C_A B$)

NB Natuurlijk gelden deze operaties ook wanneer de screens in cellen opgedeeld zijn.

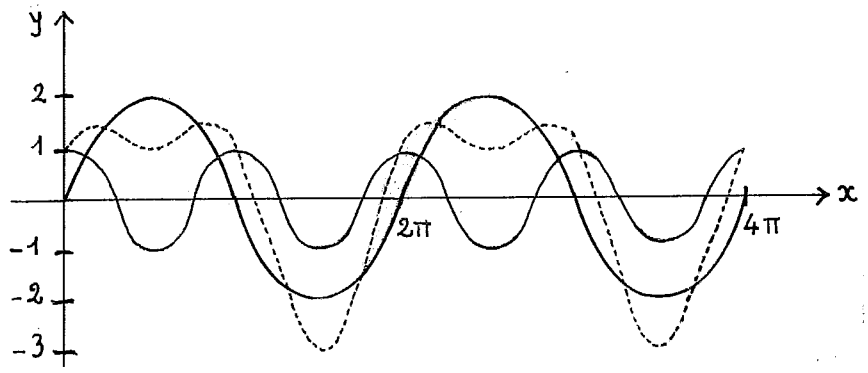
1.4.0. In het verlengde van al deze benaderingen van het verschijnsel geluid, en in het verlengde van de manieren waarop Xenakis ze in makro-strukturele processen verwerkt, zoals we verderop zullen zien, liggen de voorstellen die hij in het slothoofdstuk van Formalized Music doet voor de fabrikage van niewe timbres: "New Proposals in Microsound Structure" (FM p 242 ev)

Afgezien van allerlei argumenten die Xenakis aanvoert om aan te tonen dat traditionele opvattingen over klank-synthese op basis van spectrum-analyse en met name Fourier-analyse spaak lopen ten gevolge van verouderde opvattingen over samenklank, timbre, harmonie en kontrapunt, voert hij twee argumenten aan die naar mijn mening doorslaggevend zijn voor de aanpak die hij zelf voorstelt. Ik reken daar zijn argument over de armoede van de resultaten die bereikt worden met de tot nu toe gebruikte middelen, en waar ik van harte mee instem, niet toe. Het eerste argument is, dat de onderzoekingen van Meyer-Eppler (Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie, Berlijn 1959) hebben aangetoond dat zelfs de eenvoudigste orkestklanken variaties te zien geven in de spectrale lijnen van zowel toonhoogte frekwenties als geluidsterkte (amplitude). Deze kleine (tweede orde) variaties maken nu juist het verschil uit tussen een levenloos, met zgn pure of sinusoidale tontn gesynthetiseerd timbre, en hetzelfde timbre gespeeld op een orkestinstrument. De nabootsing daarvan op basis van deze synthese-methode zou onnoemelijk veel komplexe berekeningen vergen, derhalve zeer veel computertijd, in casu veel geld. Daarom is deze aanpak voorlopig niet opportuun.

Het tweede argument is ontleend aan onderzoekingen van Pierre Schaeffer in zijn 'Traité des Objets Musicaux' (parijs 1966), waarin deze stelt, dat het aandeel van de overgangen binnen een klank aanzienlijk belangrijker is dan het stabiele deel ervan, voor zowel timbre herkenning als muziek in het algemeen. Naarmate muziek dus meer gebruik maakt van komplexe klankconstellaties, die eventueel de ruis benaderen, des te talrijker en gecompliceerder die overgangen zullen worden. De nabootsing hiervan zou te vergelijken zijn met de opgave het silhouet van een bergformatie te konstrueren met behulp van cirkelfragmenten.

Een bijkomend argument is nog, dat de kurven die op een oscilloscoop zichtbaar gemaakt worden, in dermate komplexe configuraties aan het oog voorbijgaan, dat ook op grond daarvan vrijwel geen theorie te baseren is die gelijke tred kan houden met theorieën over patroon- en vormherkenning van geluid. De resultaten die bereikt werden bij verbindingen van 'pure' elektroniese met 'konkrete' geluiden waren veel rijker en interessanter (dank zij Varèse, Schaeffer, Henry), en deze konstatering vormt eigenlijk de basis van de methoden die Xenakis voorstelt.

1.4.1. Om te begrijpen wat Xenakis daarin precies doet, zonder de ingewikkelde en geavanceerde technieken precies uit de doeken te hoeven doen, moeten we even kijken naar een eigenschap van mathematiese funkties, in het tweedimensionale vlak.



afb. 9

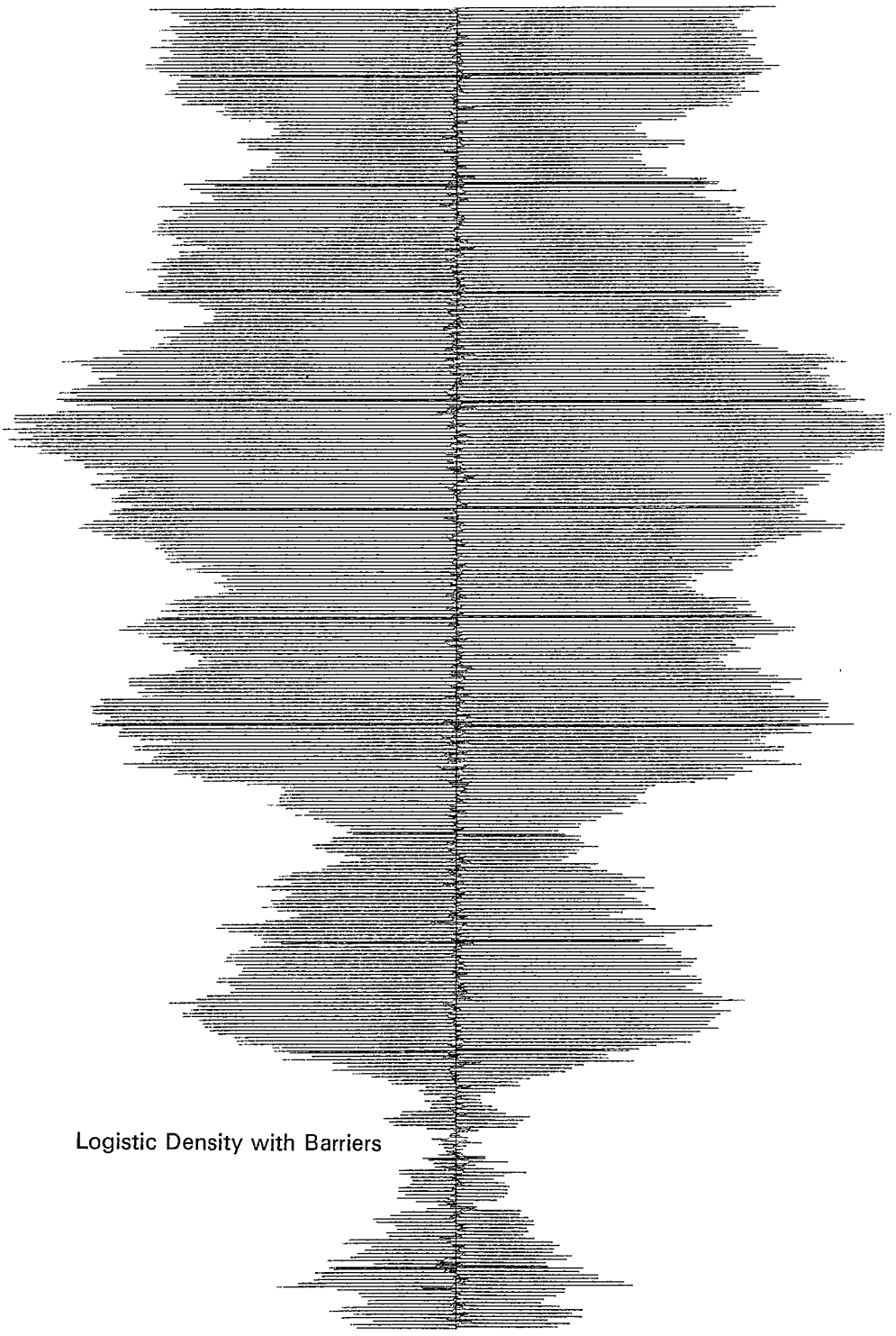
In afbeelding 9 staan twee funkties door elkaar afgebeeld, tw $y = 2sin\ x$ en $y = cos\ 2x$, beide als kontinue lijnen getekend. Deze twee zgn cirkulaire funkties zijn buitengewoon elementair en 'interfereren' in ons voorbeeld op uiterst periodiese wijze: de funktie $y = cos\ 2x$ gaat precies 2 keer zo snel als (de 'periode' is de helft van) $y = 2sin\ x$, en bestrijkt precies de helft van het vertikale gebied (amplitude) dat $y = 2sin\ x$ in beslag neemt ($y = cos\ 2x$ bestrijkt $y=1$ tot $y=-1$; $y = 2sin\ x$ bestrijkt $y=2$ tot $y=-2$.) Als we nu op ieder punt van de x-as de waarden van beide funkties *optellen*, dan ontstaat een nieuwe funktie $g(x) = 2sin\ x + cos\ 2x$, aangegeven met de gestippelde kurve. In de tekenpraktijk van deze grafiek komt het erop neer

dat we op alle plaatsen van de x-as een loodlijn trekken van de x-as tot beide kurves en die bij elkaar optellen, rekening houdend met positieve en negatieve waarden van deze loodlijnen, resp. boven en onder de x-as. Uit dit voorbeeld zien we, dat de resulterende kurve *g(x)* al een enigzins *ingewikkelder* vormverloop heeft dan de twee ander kurves afzonderlijk. We kunnen hieruit gemakkelijk afleiden, dat, naarmate de uitgangsfunkties ingewikkelder zijn, hun onderlinge samenhang minder harmonies, hun onderlinge verschilllen groter en de operaties (optellen, vermenigvuldigen, machtsverheffen, logaritme nemen etc) komplexer, de uiteindelijk resulterende kurve oneindig veel ingewikkelder wordt. Geluid, op een dergelijke manier gesynthetiseerd, wordt door het oor, wanneer de komplxiteitsgraad van de afzonderlijk elementen (sinusfunkties bv) beneden een bepaald niveau blijft, ontleed in zijn samenstellende bestanddelen. Komt het boven dit niveau, dan schakelt de waarneming over op klassifikaties in termen van timbre, kleur, beweging, ruwheid, graden van wanorde. Volgens Xenakis komen we langs deze weg terecht in een tunnel van onwetendheid. Met deze methode ('synthesis by finite juxtaposed elements') hoopt men alle gewenste klanken te kunnen maken, zelfs klanken die grote onregelmatigheden bevatten.

1.4.2. Xenakis doet nu het voorstel om in plaats van uit te gaan van deze regelmatige, cycliese en periodiese funkties, te starten vanuit een wanorde-konsept en daarop allerlei beperkingen aan te brengen met behulp van alle mogelijke funkties, waaronder probabiliteits- en andere stochastiese funkties, maar ook met behulp van funkties ontleend aan natuurwetenschappelijke processen (zoals biologiese, thermodynamiese e.d.). Zonder in te gaan op de preciese toepassing van deze bewerkingen, kunnen een aantal illustraties een redelijke indruk geven van hun effekt.

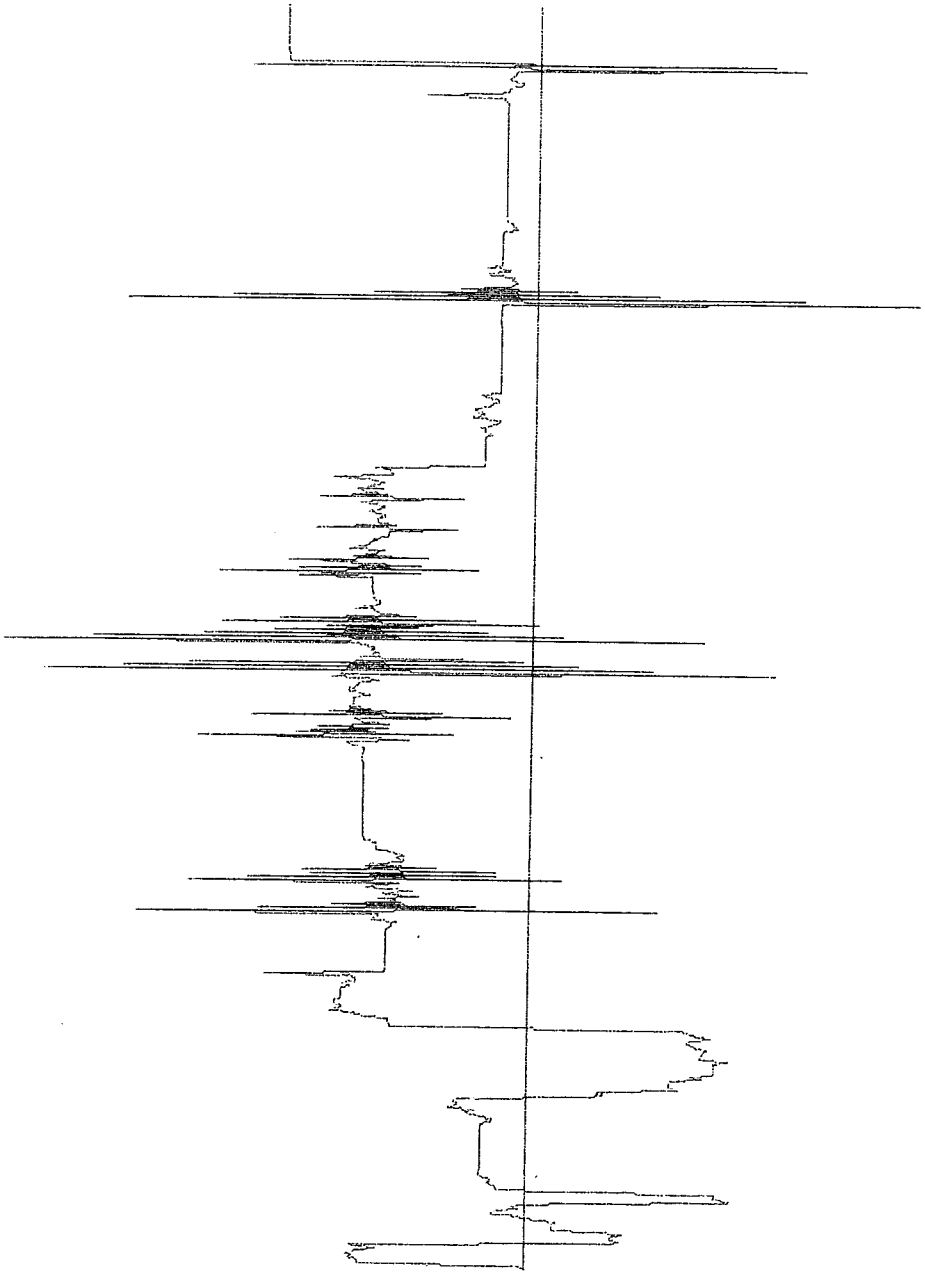
In afb 10 zien we een ruis die op symmetriese wijze aan beide kanten begrenst is met behulp van een stochastiese (random) funktie.

In afbeelding 11 is uitgegaan van twee funkties tw de exponentiele funktie, gekombineerd met Cauchy's dichtheidsfunktie. Deze operatie is bovendien uitgezet op een 'gerandomiseerde'



Logistic Density with Barriers

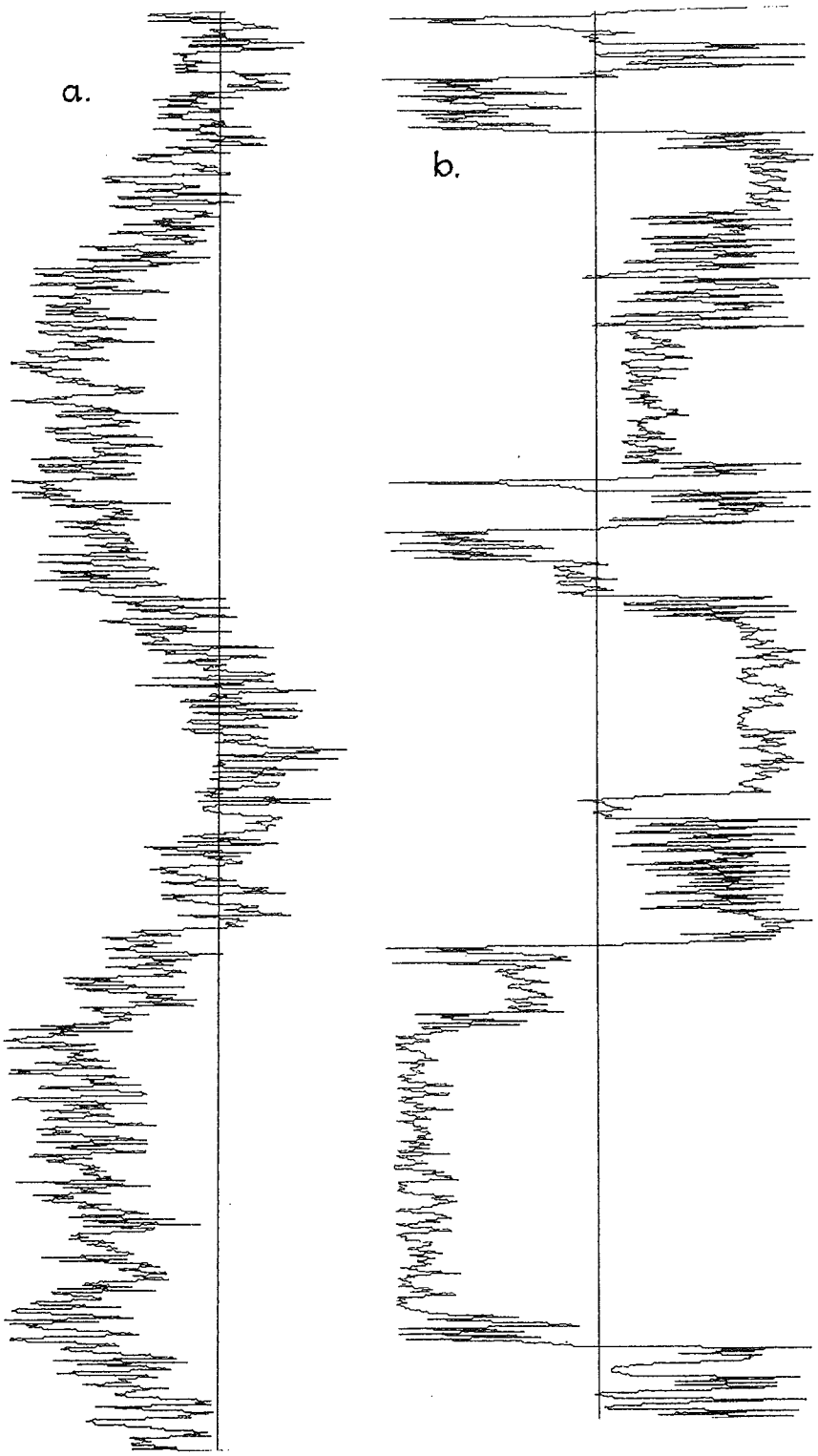
afb 10



Time

. Exponential × Cauchy Densities with Barriers and Randomized

afb. 11



a. Hyperbolic Cosine × Exponential Densities with Barriers and Determined Time

b. Hyperbolic Cosine × Exponential Densities with Barriers and Randomized Time

afb. 12

tijdsas, dwz waarop de tijd op onregelmatige wijze(via een stochasties procédé) uitgezet is.

Een voorbeeld waarin het verschil tussen een geregeld tijdsverloop en een ontregelde tijdsas goed te zien is, zijn de twee funkties op afbeelding 12. Hierin zijn de cosinus hyperbolicus x een exponentiele dichtheidsfunktie onderworpen aan stochastiese boven- en benedengrenzen, resp. op een geregelde en ontregelde tijdsas.

1.4.3. Tot zover de samenvatting van Xenakis' bemoeienissen aan de School of MUsic van de Indiana University en het Centre de Recherches Nucléaires van het Collège de France in parijs, met experimenten ten behoeve van klanksynthese. De afgedrukte grafieken hebben in de praktijk een lengte van plm 8 milliseconden (0.008 sec) en geven derhalve een beeld van de enorm gedifferentieerde mikro-struktuur van de klanken die langs deze weg geproduceerd kunnen worden. Xenakis verwijst voor toepassing van deze klanken in makro-strukturele processen naar de diverse technieken die hij in de rest van zijn geschriften uiteengezet heeft. Het artikel is vrij recent (1970?) en dateert in elk geval van na genoemde uiteenzettingen (met bijbehorende komposities).[12)]

2.0.0. Enigzins in het verlengde van de formalisatievormen uit de winkel van Xenakis, ligt de formalisatie van een hogere struktuur in de hierarchie van muzikale organisatieniveau's. Het is een bijzondere aanpak van het toonhoogteprobleem, op een hoger plan dan de statisties-probabilistiese oplossingen (zie hfdst 3) die de periode, die aan de publikatie van 'Towards a Metamusic' (Vers une Métamusique, 1967) voorafgaat, beheersen. De behandeling ervan op deze plaats wordt uitsluitend gerechtvaardigd door een bepaalde systematiek die onze uiteenzetting domineert: de globale overgang van lagere naar hogere organisatieniveau's. De uiteenzetting van Xenakis zelf is, zoals altijd, gebonden aan de produktie van enkele komposities uit plm 1966/68 tw NOMOS ALPHA (cello solo) en NOMOS GAMMA (groot orkest). In 1968 volgt dan ook 'Towards a Philosophy of Music' waarin de konstruktie van beide stukken uitvoerig wordt toegelicht. In dit hoofdstuk zullen we ons nog niet met de toepassing bezig houden, maar uitsluitend met dit toonhoogte-organisatie model, voor zover het behoort tot de 'Structures Hors-Temps', de organisatie los van de tijd. De bestudering van haar toepassing zal plaats vinden bij de behandeling van Groepstransformaties (hfdst 6)

2.0.1. Xenakis' uiteenzetting van de roostertheorie (sieve-theory) wordt voorafgegaan door onder andere een samenvatting van het muziektheoretiese werk van Aristoxenes van Tarente (plm 355-300 v Chr, leerling van Aristoteles), dat Xenakis als belangrijke grondslag van de getempereerde stemming beschouwt, met als basis de (additief) logaritmiese beschrijvingswijze van de toonhoogte-intervallen. Het ligt niet in de lijn van ons betoog in te gaan op de muziekhistoriese betekenis van Xenakis' visie op Aristoxenes en de Grieks-Byzantijnse muziek. We kunnen voor het moment volstaan met de volgende samenvatting en komen erop terug bij de bespreking van NOMOS ALPHA en in ons kommentaar. (FM p.184)

I. Definitie *hele toon:* het interval waarmee de kwint de kwart overtreft.
De hele toon wordt onderverdeeld in
a. helften (semitones)
b. derden (chromatiese diesis)
c. kwarten (enharmoniese diesis)

2. Definitie *tetrachord:* $2\frac{1}{2}$ hele toon.
Het tetrachord wordt onderverdeeld in 30 segmenten ($\frac{1}{12}$ hele toon). Op basis daarvan kunnen drie *genera* worden gekonstrueerd:de twee buitenste tonen van de kwart staan vast en de twee binnenste zijn mobiel, waardoor de drie intervallen binnen het tetrachord voortdurend verschillend kunnen zijn. Dat geeft

a. Het enharmonies genus = 3 + 3 + 24
(in hele tonen) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2$

b. Het chromaties genus = 4 + 4 + 22 (zacht)
(in hele tonen) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3} + \frac{3}{2})$

$4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 21$ (hemiolon)
(in hele tonen) $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{14}{8}$

6 + 6 + 18 (tonaion)
(in hele tonen) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

c. Het diatonies genus 6 + 9 + 15 (zacht)
(in hele tonen) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$

6 + 12 + 12 (hard:syntonon)
(in hele tonen) $\frac{1}{2} + 1 + 1$

3. Het *systeem:* kombinaties van tetrachord en hele toon leveren het pentachord (buitenste interval = kwint) en het octochord (buitenste interval:oktaaf).

4. De *tropen, sleutels en modi,* die afgeleid worden van het 'systeem'door middel van kadens-, melodiese-, dominant-, register- en andere formules, zoals bv de raga's in de Indiase muziek, waren waarschijnlijk uitsluitend verbijzonderingen van dat systeem.

Deze hierarchiese organisatie werd afgerond met de zgn *metabolae*, overgangsregels om van het ene genus naar het andere, van het ene systeem naar het andere, van de ene modus naar de andere te verhuizen. Zij zijn te vergelijken met de regels voor alteratie, modulatie en transpositie uit de latere w. Europese muziek.

2.0.2. Tot zover Aristoxenes in een notedop. De struktuur van de BYZANTIJNSE muziek haakt in op dezelfde principes, zij het dat de genera nog weer door andere intervallen gekarakteriseerd worden, echter op basis van dezelfde 30 welgetempereerde segmenten per tetrachord (of 72 per oktaaf) Voorbeeld:
Het *diatonies* genus, 1e schema = 12 + 11 + 7
(in hele tonen, nu echter multiplicatief berekend) $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{3}$ = kwart
2e schema = 11 + 7 + 12
3e schema = 7 + 12 + 11

NB merk hier op dat alleen permutaties van dezelfde intervallen worden gebruikt.

Het *chromaties* genus, zacht = 7 + 16 + 7
hard (syntonon) 5 + 19 + 6
Het *enharmonies* genus, 1e schema = 12 + 12 + 6
2e schema = 12 + 6 + 12
3e schema = 6 + 12 + 12

OP basis hiervan vond de konstruktie van de 'toonladders' plaats, waaronder uitsluitend dient te worden verstaan het toonhoogte-raamwerk waarover de melodiese konstrukties zich bewogen. Deze raamwerken werden gekonstrueerd door middel van het zgn *systeem*, dat elementen kan verenigen (synimenon) of naast elkaar zetten (diazeugmenon). Door de enorme hoeveelheid samenvoegings mogelijkheden van de tetrachorden (via de drie systemen van het octochord, het pentachord en het tatrachord) bestond er een ongelooflijke varieteit aan 'ladders', een varieteit die door allerlei oorzaken in de ontwikkeling van de West Europese muziek, eeuwenlang is miskend in muziektheoretiese en -historiese werken, en waarvan onze mineur/majeur redukties maar een slap aftreksel zijn. Ter illustratie geeft Xenakis een aantal voorbeelden van zulke 'ladders':(in intervallen)

Diatoniese ladders:

a. disjunkte tetrachords:
beginnend op de lage Δ [12,11,7][12][11,7,12]
beginnend op lage H of A [12,11,7][12][12,11,7]

b. tetrachord en pentachord:
beginnend op de lage Z [7,12,11][7,12,12,11]

c. wiel-systeem (pentachords):
[11,7,12,12][11,7,12,12][11,7.....

Chromatiese ladders:(wiel systeem)
beginnend op H [7,16,7,12][7,16,7,12][7,16,.....

Enharmoniese ladders

a. disjunkte tetrachords:
beginnend op Δ [12,6,12][12][12,6,12]
(onze witte toetsenladder vanaf D)
Al onze kerktoonaarden zijn van dit genus afgeleid, zoals ook bv van het chromaties tetrachord door middel van:

b. disjunktie en
beginnend op laag H [12,12,6][12,12,6][12,12,6][12,12,6]

Gemengde ladders:

a. disjunktie van diatonies 1e schema + zacht chromaties:
beginnend op lage H [12,11,7][12][7,16,7]

b. disjunktie hard chromaties + zacht chromaties
beginnend op lage H [5,19,6][12][7,16,7]

Voor de montage van al deze ladders geldt echter de beperking - op grond van regels voor konsonantie - dat geen imperfekt oktaaf ontstaat. Zodoende kunnen niet alle kombinaties worden gebruikt. Al deze mogelijkheden worden tenslotte gereguleerd door kompositieregels die vervat zijn in de *echoi*, en weer te vergelijken zijn de raga's.
Voor de realisatie in de tijd bestnden weer *metabolae*, die alteraties, transposities, modulaties en andere transformaties effektueerden, en die op alle variabele elementen van het boven-

geschetste bouwwerk-buiten-de-tijd van toepassing waren.

2.0.3. Tegen de achtergrond van de komplexe rijkdom van dit bouwwerk, dat de monodiese muziek schraagde, moeten we Xenakis' roosterkonsepten zien. Volgens hem heeft de westerse muziek en muziektheorie een geweldige verarming ondergaan tengevolge van de desinteresse in dit soort buiten-de-tijd struktûren, en van de slordigheid waarmee de oude hellense en byzantijnse kultuur door het westen werd 'bestudeerd' en vaak 'geannexeerd'. Samengevat zijn de belangrijkste bestanddelen van deze rijkdom:

a. getempereerde stemming is uitganspunt;

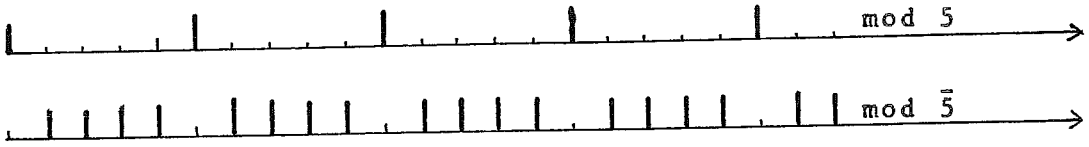
b. er is een konstant, kleinste eenheidsinterval ($\frac{1}{12}$ sekunde);

c. de optelling is de basisoperatie voor het verkrijgen van de intervalsystemen (logaritmies konsept);

d. Alle intervallen kunnen in beginsel gekonstrueerd worden. Via allerlei regels worden aan de konstruktie echter beperkingen opgelegd. Natuurlijk heeft het 'oor' een belangrijk aandeel in de tot standkoming van deze regels;

e. De kontruktie van de enorme varieteit aan 'toonaarden' wordt mogelijk gemaakt via kompositie- en transformatieregels (metabolae).

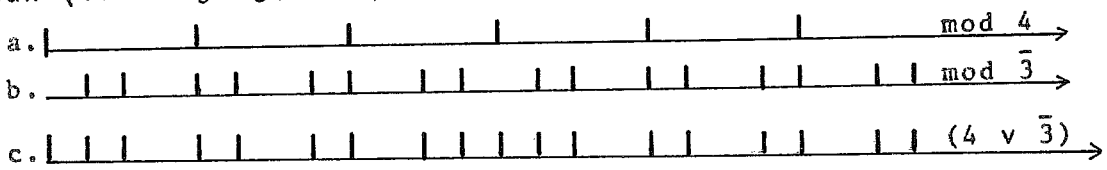
2.1.0. Stel, we willen een traliehek maken dat een of ander ingewikkeld patroon van tussenafstanden tusse de tralies bezit, maar er zijn alleen hekelementen te koop met regelmatige patronen van één itererend interval, ofschoon dit interval in verschillende maten (in hele centimeters) voorradig is; én hekelementen waarin juist op elke centimeter tralies staan behalve op regelmatige afstanden van n cm, waar telkens een tralie is weggelaten. Dus bv een hekelement van tralies op 5 cm, en zijn bijbehorende tegenhanger, die zijn complement wordt genoemd, met op elke 5 cm een ontbrekende tralie. Op de staalkaart staan ze resp. vermeld als moduul 5 en $\bar{5}$.



afb. 13

Dank zij een zeer vernuftig mechanisme in de hekken kan men evenwel elk traliepatroon dat men maar wenst, konstrueren door de volgende drie operaties toe te passen en wel zodanig, dat men maximaal 2 modulen nodig heeft met hun bijbehorende complementen:

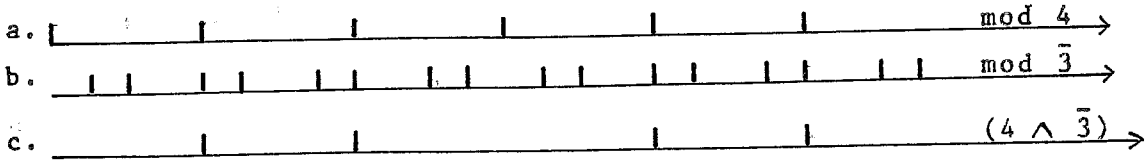
1. Men kan 2 modulen tegen elkaar monteren en alle tralies laten staan (vereniging, aangegeven met v). Bv 4 v $\bar{3}$ geeft



afb. 14

NB 1. Het vernuftige mechanisme bestaat in het geval van vereniging hierin, dat men een merkje v op *beide* hekken aan de (zelfde) boven- of onderkant moet houden bij de montage, waardoor op de plaatsen van dubbele tralies automaties één tralie wegvalt.

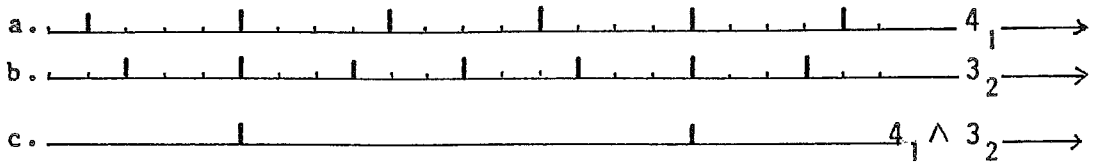
2. Men kan twee modulen tegen elkaar monteren, en alleen op de plaats van samenvallende tralies een tralie laten staan (disjunktie = $\wedge$). Bijvoorbeeld



afb. 15

NB 2. Nu moet men zorgen dat de merkjes $\wedge$ op beide hekken op gelijke hoogte staan, waardoor een tralie blijft staan waar ze dubbel voorkomen.

3. Men kan één van bovengenoemde operaties kombineren met het verschuiven van de modulen ten opzichte van elkaar, met dien verstande dat er per moduul n maar n posities zijn, aangegeven met n_i waarin i = 0,1,2,...(n-1), de zgn index. Bijvoorbeeld $4_1 \wedge 3_2$ geeft



afb. 16

NB 3. Het vernuftige mechanisme blijft zijn werk doen bij de montage, zolang de voorschriften voor v en $\wedge$ in acht worden genomen.

2.1.1. De voorbeelden in bovenstaande afbeeldingen tonen echter aan, dat het resulterende patroon c weliswaar ingewikkelder is dan de twee patronen a en b waaruit ze voortkwamen, maar nog altijd een grote regelmaat vertonen in de opeenvolging van korte patronen (periode of fase). In afb 14 bestaat de periode, die 12 cm lang is, uit de segmenten [2] [2] [5], die, gescheiden door één spatie, onophoudelijk itereren. In afb 15 is de periode ook 12 cm lang met 2 tralies op 0 en 4, als men op de eerste van twee dichst bij elkaar gelegen tralies begint te nummeren van 0 tot en met 11. Ook hier een eindeloze iteratie van dit tweetal op gelijke afstanden. In afb 16 tenslotte is zelfs een nieuw regelmatig rooster ontstaan met tralies op 12 cm van elkaar, een rooster dat overigens in de magazijnen als zodanig leverbaar is (mét complement). Om op handige wijze bestellingen te kunnen opnemen, drukken de leveranciers de patronen uit met behulp van getalpatronen die de samenstelling van een patroon per periode weergeven. Het traliewerk c uit afb 14 wordt weergegeven met

[. . . 1 2 1 2 1 1 1 1 2 . . .]

zijnde de afstand van tralie tot tralie in centimeters. Wil een klant nu, omgekeerd, een bepaald patroon hebben, dan kan hij of zij dit bestellen in de vorm van bovenstaande kode. De leveranciers beschikken dan over een standaardmethode om uit te rekenen met hoeveel hekken, van welke twee modulen en op welke

wijze deze kunnen worden gemonteerd. Stel een klant K die het volgende patroon met een periode van 12 cm bestelt:

[. . . 2 2 1 2 2 2 1 . . .]

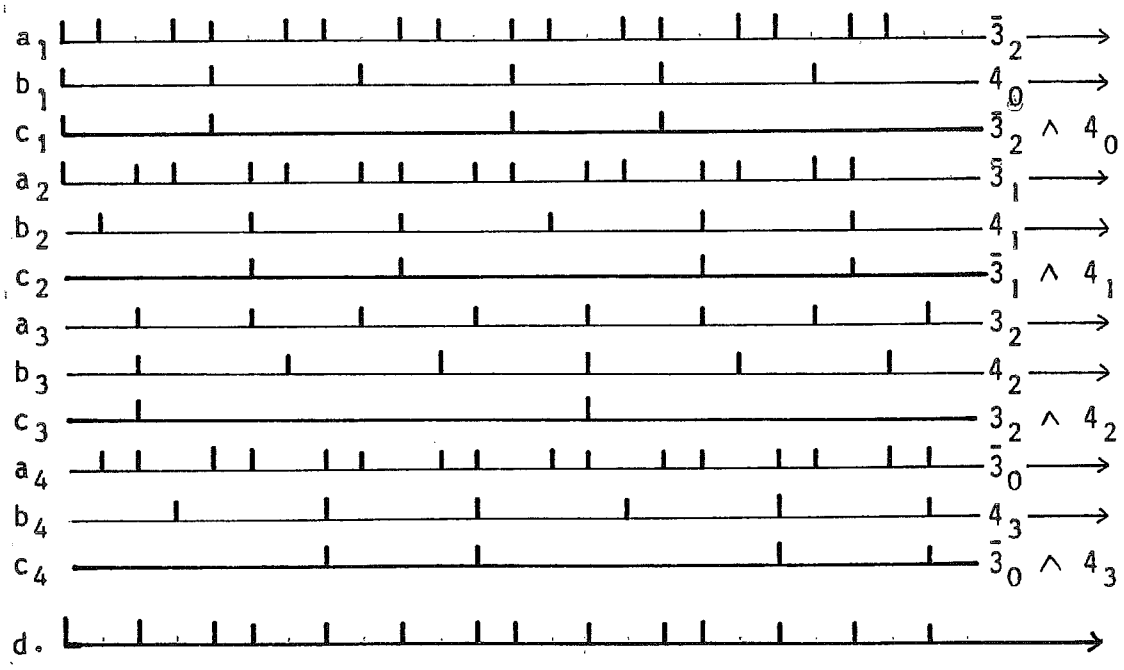
(en natuurlijk met een totaallengte aangepast aan de behoefte van de klant in kwestie). Een blik in het stalenboek geeft een aantal mogelijkheden, waaronder deze:

$$(\bar{3}_2 \wedge 4_o) \vee (\bar{3}_1 \wedge 4_1) \vee (3_2 \wedge 4_2) \vee (\bar{3}_o \wedge 4_3)$$

De bijbehorende handleiding zegt nu:

1. Monteer eerst de 4 tussen haakjes genoteerde hekken. $(a \wedge b) \rightarrow c$ (zie afb 17)
2. Monteer vervolgens, door samenvoeging van de daaruit ontstane hekken $(c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee c_4) \rightarrow d$

Hieronder volgt een weergave van de montage:



afb. 17

Opmerking 1. $\bar{3}_2 \wedge 4_0 = 4_0 \wedge \bar{3}_2$, en deze commutativiteit geldt voor alle montages $\wedge$. Het geldt ook voor $\vee$:

$$(\bar{3}_2 \wedge 4_0) \vee (\bar{3}_1 \wedge 4_1) = (\bar{3}_1 \wedge 4_1) \vee (4_0 \wedge \bar{3}_2)$$

Opmerking 2. $a \vee b \vee c = a \vee c \vee b = b \vee a \vee c = \ldots$ maw de volgorde doet er niet toe.

NB. de volgorde 'eerst-de-operaties-tussen-haakjes-en-vervolgens-de-rest' is wel regel.

Opmerking 3. De lengte van de periode is altijd voorspelbaar zodra men de modulen weet. Aangenomen dat een montage altijd

plaats vindt op basis van modulen met gelijke basiseenheid (in ons geval de centimeter) is de lengte van de periode gelijk aan het produkt van de modulen:

$$\text{Per}(\text{mod } 5_i \text{ en mod } 7_j) = 5 \times 7 = 35 \text{ (cm)}$$

Het omgekeerde geldt ook: indien men een periode van 36 wenst, kan men monteren met paren a en b die als produkt 36 hebben:

$$a.b = 36, \text{ dus als } a = 2 \text{ dan } b = 18$$
$$a = 3 \text{ dan } b = 12$$
$$a = 4 \text{ dan } b = 9 \quad \text{etc}$$

Men kan echter ook monteren met modulen die op een fraktie van de basiseenheid gebouwd zijn, bv op halve centimeters, 1/3 cm etc. Een periode van 12 cm = periode van 24.½cm
= periode van 36.1/3 cm etc.

Dus het hekwerk dat we konstrueerden in afb 17 kan ook gemaakt worden met de modulen 3 en 8. De uitdrukking luidt dan:

$$(8_0 \wedge \bar{3}_1) \vee (8_2 \wedge \bar{3}_2) \vee (8_4 \wedge 3_1) \vee (8_6 \wedge \bar{3}_0)$$

en de bestelling is genoteerd in halve centimeters:

[. . . 4 4 2 4 4 4 2 . . .]

Opmerking 4. Stel dat het bevestigingspunt van het hek d vaststaat (een paal ter hoogte van de eerste tralie bv) en men wil toch het gehele patroon een paar posities naar rechts hebben ten opzichte van dat bevestigingspunt. Deze operatie komt er dan eigenlijk op neer dat van meet af aan alle hekken evenveel posities moeten opschuiven en we hebben gezien dat 'opschuiven' een kwestie is van index veranderen. (zie 2.0.1. punt 3). Als we dus ergens moduul $\bar{3}_2$ hebben gebruikt en we willen twee posities vooruit (naar rechts) dan zouden we $\bar{3}_4$ kunnen noteren. We weten echter dat de index alleen maar kleiner dan de moduul kan zijn. Immers als moduul 3_0 drie posities naar rechts is opgeschoven (3_3) valt hij weer geheel samen met 3_0. Dus moduul 3_4 is 1 positie verder dan 3_3 en deze is weer gelijk aan 3_0. Derhalve

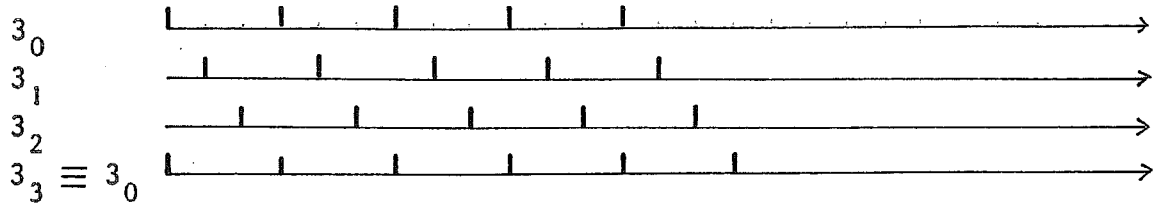
$$3_0 \equiv 3_3 \equiv 3_6 \ldots$$
$$3_1 \equiv 3_4 \equiv 3_7 \ldots$$
$$3_2 \equiv 3_5 \equiv 3_8 \ldots$$

waar $\equiv$ betekent: valt samen met, is congruent met; immers

$$3_0 \equiv 3_3 \equiv 3_6 \ldots \equiv 3_0$$

Het vernuftige mechanisme zorgt er immers voor dat bij montage

volgens ∧ alle tralies van alle hekken wegvallen op 1 hek na...
Voorbeeld



afb. 17a

Het komt er dus op neer dat *alle* getallen in de reeks indexen 0,3,6,9... 'congruent mod 3 zijn' dwz allemaal samenvallende traliewerken of 'roosters' zijn, en dus allemaal tot hetzelfde rooster behorend. Het zelfde geldt voor de reeks 1,4,7,10,... en voor de reeks 2,5,8,11,... Deze drie reeksen tesamen

$$(3_0 \vee 3_1 \vee 3_2)$$

vormen de rij van natuurlijke getallen 1,2,3,4... immers bij montage volgens de voorschriften bij v valt geen enkele tralie weg en alle posities zijn ingenomen op 1 cm afstand van elkaar.

Als we nu nog even het probleem van hek d (afb 17) bij de horens pakken: het patroon bestond uit een regelmatig terugkomende (itererende) periode van 12 cm en met een struktuur

[. . . 2 2 1 2 2 2 1 . . .]

We kunnen dit hek in 12 verschillende posities zetten en steeds zal het met geen van de voorafgaande samenvallen. De 13e positie valt evenwel weer samen met de eerste, of formeler: de 12e valt samen met de 0e (nulde). Als we dus elke index in de formule van dezelfde variabele voorzien, kunnen we bij de montage van het hek eenvoudig een getal invullen voor zijn positie (transpositie). Voor hek d wordt de standaardformule daarom:

$$(\bar{3}_{n+2} \wedge 4_n) \vee (\bar{3}_{n+1} \wedge 4_{n+1}) \vee (3_{n+2} \wedge 4_{n+2}) \vee (\bar{3}_n \wedge 4_{n+3})$$

waarin n = 0,1,2,...,11. Bij de montage doen we dus twee dingen:
1) we gaan uit van vastgestelde n, bv n=5, dat betekent 5 posities naar rechts ten opzichte van de oorsprong, in casu de bevestigingspaal aan de uiterste linker zijde.
2) voor de montage reduceren we echter alle indexen, die nu allemaal te groot zijn geworden, weer tot hun kleinste verwante in de reeks waarmee elk getal congruent is. Dwz $\bar{3}_7$ wordt $\bar{3}_1$, 4_5 wordt 4_1, etc. Immers de tralies vallen verder toch samen als de konstruktie in zijn geheel al 5 posities naar rechts begon-

nen is.

Opmerking 5. Als we de basiseenheid veranderen kunnen we toch alle hekken konstrueren die we wensen. We moeten alleen alle berekeningen op de nieuwe eenheid baseren. We werkten tot nu toe met centimeters. We zagen (zie opm 3) dat deze eenheid in frakties opgedeeld kon worden om met andere (verwante) modulen toch dezelfde hekken te kunnen maken. In feite kan echter *elke* maat basiseenheid zijn, als ie maar konstant blijft bij één bepaalde toepassing.

2.1.2. Wat hierboven staat is in eenvoudige beelden een weergave van de grondbeginselen van de *Restklasse Algebra*.
"Twee getallen (hele) a en b heten congruent modulo m als ze dezelfde *rest* hebben wanneer ze door m gedeeld worden".
Notatie: $a \equiv b (mod\ m)$.
Byvoorbeeld:

$$89 \equiv 25 (\text{mod } 4) \text{ omdat } \frac{89}{4} = 22 = 1, \text{ en } \frac{25}{4} = 6 + 1.$$

immers, beide getallen liggen dan op hetzelfde rooster mod 4, één positie naar rechts (rest 1) verschoven. De moduul is dus 4_1 dwz de getallenreeks 1,5,9,13,...25,29,...85,89,93,...etc.

NB. Tot hiet hebben we voortdurend positieve getallen genomen met uitdijende reeksen naar rechts. Maar de eigenschappen van deze algebra strekken zich ook uit tot de naar links uitdijende reeks. Want

mod 4_0 = ...-16,-12,-8,-4,0,4,8,12,...
4_1 = ...-15,-11,-7,-3,1,5,9,13,... etc

De *index* bij de moduul is dus in feite de *rest*, die een oneindige reeks hele getallen tot een zelfde *klasse* doet behoren, het rooster.

Voor een korte uiteenzetting van de restklasse-algebra kan men weer terecht bij AYRES, speciaal hfdst 5, waarin ook gedemonstreerd wordt wat er gebeurt als men twee getallen mod m optelt of vermenigvuldigt. Daar blijkt namelijk dat bij optellen en vermenigvuldigen de betreffende restklassen gewoon opgeteld resp. vermenigvuldigd kunnen worden, waarna de uitkomst, gereduceerd tot het kleinst mogelijke getal mod m, aangeeft in welke restklasse (dus in welk rooster) het nieuwe getal terecht is gekomen. Voorbeeld:

1) $4 + 5 = 9$, in restklassen weergegeven:
$[0 \bmod 4] + [1 \bmod 4] = [1 \bmod 4]$, en dat klopt want
$9 \equiv 1 \bmod 4 = 4_1$

2) $6 + 7 = 13$
$[2 \bmod 4] + [3 \bmod 4] = [5 \bmod 4] \quad [1 \bmod 4] = 4_1$

3) $2 \times 3 = 6$
$[2 \bmod 3] \times [0 \bmod 3] = [0 \bmod 3]$, hetgeen ook juist is want
$6 \equiv 0 \bmod 3 = 3_0$.

4) $4 \times 8 = 32$
$[4 \bmod 5] \times [3 \bmod 5] = [12 \bmod 5] \equiv [2 \bmod 5]$, immers
$32 \equiv 2 \bmod 5 = 5_2$.

2.1.3. Afgezien van alle interessante eigenschappen aan de calculus van deze algebra, moeten we er een paar uitlichten die voor Xenakis' gebruik ervan van belang zijn.

1. De begripsopbouw van deze algebra wordt door Xenakis gebruikt voor de konstruktie van toonhoogteroosters. De hekwerken uit bovenstaande uiteenzetting moeten nu vertikaal in plaats van horizontaal gedacht worden, korresponderend met de begrippen laag $\longleftrightarrow$ hoog in het toonhoogteveld. De basis voor de toepassing wordt gevormd door de gelijkzwevende temperatuur: een of ander (willekeurig gekozen) toonhoogte*interval* dient als grondeenheid voor de konstruktie van een rooster, zoals de centimeter in bovenstaande voorbeelden dat deed. De kleine sekunde (1/12 okt), de kwart sekunde (1/24 okt), elke fraktie van het oktaaf kan worden gekozen als basiseenheid, die bij Xenakis de ELD wordt genoemd (elementary displacement) en in de wiskunde 'unity', eenheid heet. Het hekwerk dat door klant K werd besteld in 2.1.1 en waarvan de konstruktie schematies is weergegeven in afb 17, is isomorf met de majeurtoonladder, gebaseerd op ELD = de kleine sekunde = 1/12 oktaaf. Het rooster kan naar links en naar rechts (omlaag en omhoog) oneindig uitgebreid worden en is het rooster van de majeurtoonaard. De standaardformule in 2.1.1. opm 4 met n als variabele voor de transposities van het rooster blijkt nu uiterst nuttig. Immers als we de c (elke willekeurige c) eens als oorsprong nemen, dan geeft de standaardformule met $n = 0$ alle witte toetsen van de piano (oneindig naar links en

rechts doorgedacht), dwz het majeurrooster met c als oorsprong. Houden we aan deze oorsprong vast, dan produceert deze formule ditzelfde majeurrooster een halve toon hoger als we n=1 stellen, een hele toon hoger als n=2,..., een grote septiem als n=11, en wanneer n=12 zitten we weer op de witte toetsen dwz *n* is op zichzelf een modulus (van transposities) en heeft restklassen 0,1,2,...11, dus $n_0 = n_{12} = n_{24} = \ldots$

$n_1 = n_{13} = n_{25} = \ldots$

etc

2. Xenakis geeft voorbeelden van zeer uiteenlopende roosters met verschillende ELD. Twwe aspekten ervan moeten even apart vermeld worden. Ten eerste, met behulp van bovenstaande technieken kunnen *alle* roosters worden gekonstrueerd die men maar wenst. M.a.w. ook alle bestaande toonhoogte toonhoogtesystemen, waar ook ter wereld of uit welke verleden, heden of toekomstige kultuur ook, kunnen ermee uitgedrukt worden. Xenakis noemt dit ook uit musicologiese overwegingen van het grootste belang: op basis van een uniform begrippensysteem kunnen de verschillen en overeenkomsten tussen alle mogelijke systemen nauwkeurig tot uitdrukking worden gebracht. Ten tweede refereert Xenakis tussen neus en lippen door even aan een idee dat Varèse vermoedelijk voor ogen moet hebben gestaan toen hij het had over een 'spiralerende toonladder' in een kwintencyclus, waarbij oktaafrelaties vermeden konden worden, Met de modulustechniek kunnen we nu gemakkelijk iets dergelijks konstrueren: uitgaande van de verdeling van het oktaaf in kwarttonen (1/24 okt) kunnen we een rooster samenstellen uit twee roosters (zoals in de majeurladder met mod 3 en 4) met een periode die *niet* 24 is. We hebben al gezien (2.1.1 opm 3) dat de lengte van de periode gelijk is aan het produkt van de gebruikte modulen. Bij de majeurladder was dit 12 = 3 x 4. Als we nu een konstruktie maken met twee modulen die, met elkaar vermenigvuldigd geen 24 of een veelvoud van 24 leveren, vermijden we automaties oktaven in het rooster, bijvoorbeeld de konstruktie

$$(\overline{11_n \vee 11_{n+1}}) \wedge 7_{n+6}$$

waarin n=0,1,2,3,...,23, is samengesteld uit mod 11 en 7 en heeft dus periodiciteit 11 x 7 = 77, dwz na een afstand van 3 oktaven en ruim een hele toon kunnen pas weer oktaafrelaties op-

treden. Het is zelfs mogelijk oktaafrelaties geheel buiten de gehoorgrenzen te dirigeren: de periode die ontstaat met modulen 17 en 18, en de kwarttoon als ELD, is 17 x 18 = 306, en dit getal is groter dan de 11 oktaven die zo ongeveer het maximaal hoorbare gebied vormen:

$$\frac{306}{24} = 12 \text{ oktaven} + 18 \text{ kwarttonen.}$$

3. Naar analogie van de 'metabolae' in de Griekse en Byzantijnse systemen, heeft Xenakis metabolae tot zijn beschikking in de vorm van

a. Veranderingen in de index(-en) van een rooster;

b. verandering van de modulus of modulen zelf.

In het eerste geval ontstaan transposities. In het tweede verandert de struktuur van een rooster. Van zelfsprekend is er dan nog als derde mogelijkheid een kombinatie van deze twee metabolae.

Een heel bijzondere rekenkundige eigenschap van de restklassen is de volgende. De restklassen die ten opzichte van een bepaald getal, zeg r = 18, priemgetal zijn, kunnen een multiplicatieve *groep* vormen. Aangezien we het nog apart over groepen gaan hebben, stellen we een uiteenzetting daarover nog even uit en volstaan met een voorbeeld van wat hiermee bedoeld wordt.

Neem bv de getallen 1,5,7,11,13,17, die allen priemgetallen zijn en tot restklassen behoren van mod 18. Als we willekeurig twee getallen hieruit met elkaar vermenigvuldigen, komt er een getal uit dat weer tot het rooster van één van deze zes priemgetallen behoort. Voorbeeld:

$$7 \times 11 = 77$$

$$77 \equiv 5 \pmod{18} \text{ want}$$

$$\frac{77}{18} = 4 \text{ rest } 5$$

maw we kunnen 77 'reduceren' tot een getal uit de restklassen 0,1,2,...17 van moduul 18. (vergelijk 2.1.1 opm 4, de samenvatting in punt 2 aan het slot). We zien echter dat 5 in de genoemde serie van 6 priemgetallen voorkomt en dat we dus *binnen deze serie* zijn gebleven. In een tabel (matrix) kan een volledig overzicht worden gegeven van dez groep, waarin telkens twee met elkaar vermenigvuldigde getallen uit de zes priemgetallen een uitkomst te zien geeft (die tot dezelfde serie behoort) en die

tot stand is gekomen na 'reduktie tot restklasse mod 18'. (Zie afb 18 met daarnaast nog een kleine matrix van drie getallen die binnen deze groep nog een gesloten sub-groep blijken te zijn met precies dezelfde eigenschappen.)

x	1	5	7	11	13	17
1	1	5	7	11	13	17
5	5	7	17	1	11	13
7	7	17	13	5	1	11
11	11	1	5	13	17	7
13	13	11	1	17	7	5
17	17	13	11	7	5	1

x	1	7	13
1	1	7	13
7	7	13	1
13	13	1	7

afb. 18

Als je nu in een muziekstuk, waarin de roosters gekonstrueerd zijn uit montages van (operaties op) telkens twee modulen, dan kun je je een programma van afwisselende roosters voorstellen, die elkaar opvolgen in een gesloten circuit (te vergelijken met regels voor akkoordopeenvolgingen) van moduul-koppels die via vermenigvuldiging in die bepaalde volgorde bij elkaar terecht gekomen zijn. Bijvoorbeeld, stel je begint het stuk met het koppel 11 en 13. (NB. de formule, zoals hierboven voor bv de majeurladder etc, geeft nadere precisering over precieze ligging en struktuur van het rooster dat op basis van mod 11 en 13 ontstaat). Voor de eerstvolgende roosterverandering (modulatie) vermenigvuldig ik 11 x 13 en kijk op de matrix welke restklasse het gevolg is van die operatie: 11.13 = 17.
Een tweede regel, die de komponist zichzelf oplegt, zegt dan, dat mijn tweede rooster zal bestaan uit een montage van de moduul die uit vermenigvuldiging van dit eerste koppel ontstaat, met die, welke uit vermenigvuldiging van deze nieuwe met de laatste uit het vorige koppel onstaat. Zo kan ik doorgaan tot het moment dat het eerste koppel weer te voorschijn komt. De lezer wordt verzocht de ingeslagen route zelf af te maken op de volgende manier:

11.13 = 17
13 x 17 = 5 } → nieuw rooster met 17 en 5.
17 x 5 = 13
5 x 13 = 11 } → nieuw rooster met 13 en 11.
13 x ...etc

tot hij of zij bij het koppel 1,11 aankomt, dat weer 11 en 13 oplevert. Dit is één van de modulatiecycli (metabola) die een kompositie kan doorlopen.

NB 1. Merk op dat het niet uitmaakt in deze matrix of men het eerste getal uit de linkerkolom neemt en vervolgens het tweede uit de bovenste rij, of omgekeerd: de matrix is symmetries aan beide zijden van de diagonaal, de groep is commutatief, het is een Abelse Multiplicatieve Groep dwz voor zover het vermenigvuldigen betreft (11 x 17 = 17 x 11 = 5)

NB 2. Nu is het ook duidelijk dat men bij het doorlopen van bepaalde route vast kan lopen: als we immers onverwacht (afhankelijk van het koppel waarmee we starten) in de sub-groep van de matrix (zoals de kleine matrix in afb 18) terechtkomen, blijven we er eeuwig in rondcirkelen als we niet zorgen voor een nood-metabola die voor maatregelen zorgt als we in zo'n 'loop' terecht komen. Overigens is zo'n 'loop' een karakteristieke eigenschap van groepen en sub-groepen, om niet te zeggen dat een 'loop'= een groep, per definitie.

NB 3. Vanzelfsprekend zijn er nog veel meer mogelijkheden om roosterprogramma's en bijbehorende metabolae te konstrueren. Een intensieve bestudering van de restklasse algebra, gekombineerd met groepstheorieën, kan de inventiviteit op dit gebied ten zeerste bevorderen...

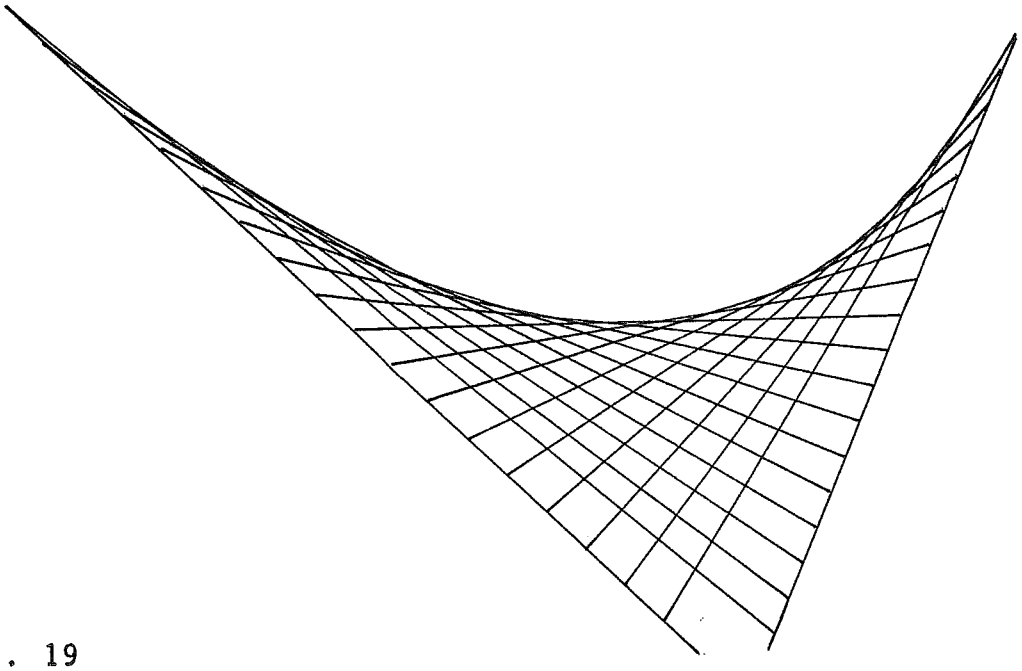
3.0.1. Vanaf hier gaan we ons een groot aantal bladzijden lang bezig houden met de bestudering van enkele elkaar ook chronologies opvolgende kompositie procédé's in het oeuvre van Xenakis. In 'Formalised Music' worden deze uitvoerig beschreven en domineren tot op heden het werk van de ingeieur, filosoof, komponist, ook al zijn er na het verschijnen van zijn boek weer een heleboel dingen veranderd en hebben nieuwe wiskunde gebieden zich intussen toegang verschaft tot zijn komposities. Naar mijn mening staat één belangrijk konsept centraal in de ontstaansgeschiedenis van Xenakis' kompositie methoden, ofschoon hijzelf bij gelegenheid van een openbaar interview[13)] uitermate scepties stond tegenover het etiket dat met deze opvatting op zijn werk wordt geplakt. Het lijkt me daarom zinvol een ruime portie van de uiteenzettingen in de komende hoofdstukken te beschouwen als graadmeter voor de juistheid van deze opvatting, die, zoals ik in mijn kommentaar zal proberen aan te tonen, ook verregaande filosofiese konsekwenties heeft bij de beoordeling van de waarde, eventueel de beperktheden van zijn werkwijze, zoals die in zijn komposities gestalte heeft gekregen. Aangezien dit centrale konsept tot een van de belangrijkste werkhypothesen van dit boek behoort, ben ik om methodiese redenen genoodzaakt er in dit stadium melding van te maken. Immers, veel van de komende uiteenzettingen konden alleen hun huidige vorm krijgen tegen de achtergrond van deze hypothese. Ik waarschuw echter met nadruk degenen die een hypothese als een generalisatie wensen te beschouwen. Ondanks de soms ruige en hard aandoende konsekwentheid van Xenakis' wiskundige toepassingen, zijn er voldoende stukken waarin materiaal aan te wijzen is dat de hypothese lijkt te falsificeren. Er zijn tegenstrijdigheden genoeg in het oeuvre te vinden, maar ze zijn dan ook niet allemaal terug te voeren op één hoofdzonde. Integendeel, we hebben in de kreatieve kunsten ook te maken met ingewikkelde en lang niet altijd gemakkelijk te achterhalen drijfveren die tot het ontstaan van een werk aanleiding geven. In elk geval moeten we ons op onberekenbare, onvoorspelbare verrassingen voorbereid houden en allerlei artis-

tieke uitspattingen, die niet geheel volgens het boekje verlopen, niet meteen als hinderlijke abcessen op een mooie theorie te beschouwen. Dan moet de theorie maar wat minder mooi worden, als zij ons daarmee dichter bij de toesbare werkelijkheid houdt.

3.0.2. De werkhypothese luidt, *dat de werkwijze van Xenakis gebaseerd is op een MASSA-KONSEPT, waarin de individuele gebeurtenis (statistiese eventualiteit) zowel gevolg van als ondergeschikt is aan een sturingsmechanisme, dat in beginsel uitsluitend gericht is op het gedrag (de organisatie) van de totale voorraad individuele gebeurtenissen als één geheel: sterker nog, het mechanisme IS het geheel, en het geheel is het mechanisme...*

Deze hypothese kan op zeer vele manieren getoetst worden. Om hem toe te lichten moeten we ons eerst wel gedurende enige bladzijden met de bestudering van de verschillende procédé's bezig houden, die tot de konstruktie ervan hebben geleid. In elk geval zal het door Xenakis zelf gebruikte begrip *'Masses Sonores'* erg behulpzaam blijken te zijn bij het begrijpen van de statistiese (stochastiese) konstrukties die aan deze procédé's ten grondslag liggen.

3.0.3. Vanaf de eerste kompositie (METASTASIS voor orkest, 1953/54) die Xenakis publiceerde, deden de mathematiese experimenten al hun intrede. Zoals uit onze inleiding blijkt, leidden verschillende wegen naar de 'masses sonores' en daarmee naar de zgn Stochastiese muziek. De 'regelvlakken' en andere typies geometriese figuren, gekonstrueerd als grote glissando-weefsels, waren zelfs aanleiding om bij de konstruktie van Philipspaviljoen op de wereldtentoonstelling te Brussel (1958) te experimenteren met 'gebogen vlakken opgebouwd uit rechte lijnen' (zie afb 19), de zgn hyperboliese paraboloiden en zadelvlakken[14]. De grafieken van die glissandovelden uit METASTASIS, PYTHOPRAKTA, maar ook uit latere werken zoals POLLA TA DHINA en SYRMOS, zijn zo langzamerhand overbekend en krijgen handelswaarde op zich (zie "Les Polytopes" van Revault d'Allonnes, Parijs 1976. Een aardige verzameling is overigens te vinden in het tekstboek bij de Erato-platencassete "xenakis" uit 1969). Zij vertonen (op papier) in elk geval duidelijke gelijkenis met de architectoniese ontwerpen voor het paviljoen, al moeten we enorm op ons qui-vive



afb. 19

zijn bij uitspraken over het visueel twee-dimensionale, het visueel drie-dimensionale, en het auditieve effekt op de betreffende zintuigen. Dat zijn ingewikkelde onderwerpen vol met haken en ogen. Onze verhandeling is niet voor de ermee samenhangende problematiek ingericht, maar de toespeling erop is bedoeld om zo min mogelijk te vervallen in al te gemakkelijke konstrukties over verbanden tussen grafiese en bv auditieve werkelijkheden. In 1.2.8 benadrukten we al de voor- en nadelen van verschillende notatie systemen en wezen we op de bruikbaarheid van het een of andere systeem voor het begrijpen (of vergemakkelijken daarvan) van bepaalde aspekten van het stukje werkelijkheid dat erin weergegeven wordt.

Voor de bestudering van de eerste stochastiese muziek, kan volstaan worden met een paar algemene opmerkingen over de komposities METASTASIS (1953/54) en PYTHOPRAKTA (1955/56), gevolgd door een uitvoeriger inleiding naar ACHORRIPSIS 1956/57) waarin een aantal principes uit de eerstgenoemde stukken rigoureus en konsekwent worden doorgevoerd. Welnu, de beide orkestwerken die aan het begin van de lange lijst van Xenakis' werken staan, introduceren globaal de volgende zaken in de muzikale kompositie:

1) *Geometrisering* van bepaalde muzikale komplexen. De weergave op twee-dimensionaal grafiekpapier is niet zonder meer een alternatieve schrijfwijze van muziek. Dus niet uitgevonden om

symfoniën van Beethoven mee weer te geven, maar omdat in het kompositoriese denken het bewustzijn doorbrak van *'funktionaliteit' en 'afbeelding'* in de wiskundige betekenis van deze woorden. Het Cartesiaanse vlak (daarom) geeft rekenschap van relaties tussen variabelen, eigenschappen, komponenten etc, uitgedrukt in hun respektieve koördinaten, de assen. Het enkele glissando is daar een voorbeeld van: toonhoogte als funktie van de tijd, met als speciale uitdrukking (vgl 1.1.3):

$$\frac{dh}{dt}$$

zijnde de *graad van toonhoogte-verandering* (of snelheid van verandering) uitgedrukt ten opzichte van een konstante tijdschaal. Er is maar een kleine stap voor nodig om hele konstrukties vanuit deze basisfiguur op te bouwen, die in hun geheel zelf weer 'graden van verandering' ten opzichte van de tijdsas zijn, als het ware zich in de tijd ontrollende plastieken van geluid. Het tijdperk van de konstruktie van karakteristieke thema's en enkelvoudige melodiese lijnen is hier definitief verlaten ten gunste van konsepten over samengestelde strukturen, weefselpatronen, klankmengsels, en polyfonieën van zulke op elkaar inwerkende totalen. Dat brengt ons automaties naar een tweede belangrijke begripsverandering:

2) *Dichtheids-konsepten.*, die aan de statistiese dynamica (kynetiese theorie van de gassen bv) ontleend zijn, waar men ook nieuwe begrippen moest introduceren om massale verschijnselen mee te kunnen beschrijven, ze daarmee te kunnen onderzoeken, te verklaren, en er eventueel voorspellingen over te kunnen doen. Bij zulke verschijnselen (zoals de bewegingen van de moleculen van een gas in een afgesloten ruimte onder bepaalde atmosferiese omstandigheden, de beweging van sterren in melkwegstelsels, of de haargroei over een bepaald lichaamsoppervlak etc) heeft het geen zin en is het bovendien onbegonnen werk om een studie af te stemmen op het afzonderlijke elementaire deeltje en vandaaruit naar de volgende deeltjes, om tenslotte uit een overzicht van de gedragingen van alle deeltjes een uitspraak te doen over het verschijnsel waar ze deel van uitmaken. Zo ook bijvoorbeeld bij wolken van pizzicati of andere mengsels die uit grote hoeveelheden elementaire deeltjes bestaan: als men geïnteresseerd is in het gedrag van de massa als geheel, meer dan

in het gedrag van elk deeltje ten opzichte van elk ander deeltje, moet men in termen van dichtheid denken om de konstruktie ervan mogelijk te maken, maar ook als luisteraar om van ongrijpbare veelheid naar grijpbare substantie en waarneembare evolutie over te kunnen schakelen. Een wat specifiekere benadering van dit konsept levert ons de statistiese wiskunde, die handelt over verdelingen waarin met name een rol spelen de begrippen

3) *gemiddelde* en *afwijkingen* van gemiddelden.

Xenakis vat het zō samen (FM p. 16):

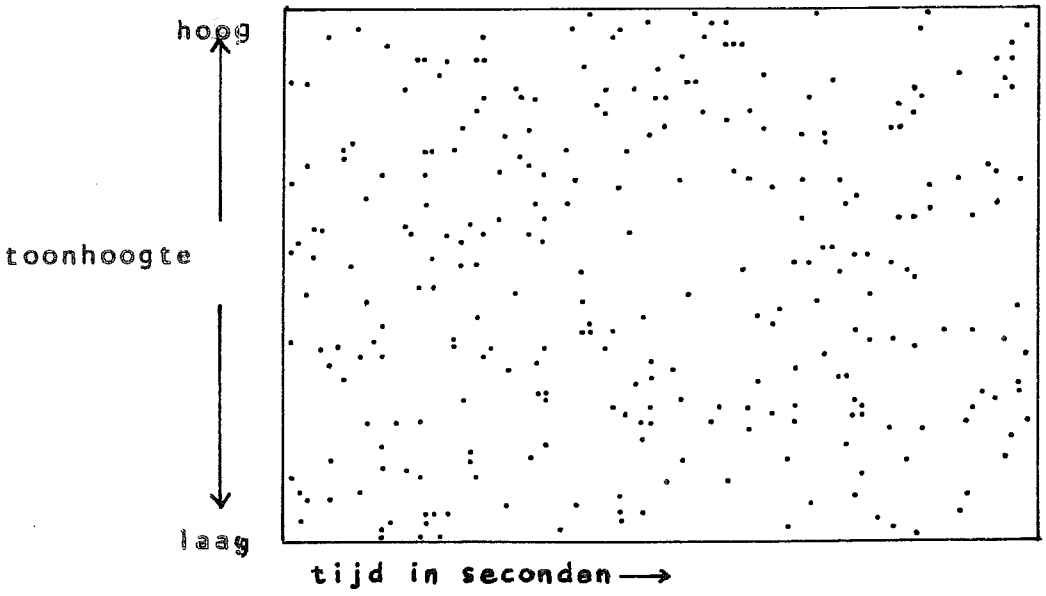
a. We kunnen geleidelijke transformaties van grote verzamelingen (korrel- of kontinu-klanken) besturen. Met behulp van gemiddelden en afwijkingen daarvan kunnen we deze verzamelingen vorm geven en in diverse richtingen ontwikkelen. Alle mogelijke konstrukties kunnen elkaar afwisselen in evoluties van *orde* naar *wanorde* en omgekeerd.

b. Deze transformaties kunnen behalve geleidelijk ook abrupt zijn tengevolge van plotselinge afwijkingen van gemiddelden.

c. Zeer onwaarschijnlijke gebeurtenissen (gegeven de gemiddede toestand die 'heerst') kunnen gekonfronteerd worden met zeer gemiddelde (= waarschijnlijke!).

d. Zeldzame gebeurtenissen (naar de extremiteiten van de afwijkingen toe) kunnen mengsels van zeer bijzondere samenstelling opleveren. Hier spelen de eigenschappen van de Poisson-verdeling een rol van betekenis (zie hieronder).

3.1.0. Laten we een muzikale massa (komplex) eens van dichtbij bekijken. We kunnen ons gemakkelijk een strijkorkest van plm 60 man voorstellen, dat gedurende bv 10 seconden zeer veel pizzicati speelt, waarvan elke instrumentalist er een bepaalde hoeveelheid doet, vrij kiezend uit de verschillende registergebieden die op zijn instrument ter beschikking staan, en in een ritme, dat onregelmatig is en uitsluitend afgestemd op de opgave een bepaalde hoeveelheid te benaderen. We kunnen ons even gemakkelijk voorstellen dat een schets van zo'n pizzicato-wolk er globaal zó kan uitzien (afb 20), als we ons even willen beperken tot tijd en toonhoogte alleen:



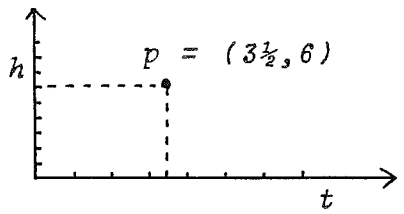
afb. 20

De komponist staat nu voor de opgave partijen voor 60 musici te schrijven, waarop staat wat zij moeten doen. Hij kan het doen met globaal een omschrijving te geven (in woorden) van wat hij wil, ongeveer op de wijze waarop dat hierboven gebeurd is: alweer een notatiesysteem voor muziek! met al zijn voordelen, maar, zo als we uit de praktijk zo langzamerhand weten, ook grote nadelen. Een van de 'voordelen' is, dat de komponist op

deze wijze veel van de problemen kan afschuiven naar de - naar wij hopen - gewetensvolle musicus en dirigent. Een van de belangrijkste nadelen is evenwel, dat het resultaat ten gevolge van dat soort aanwijzingen en de ingebouwde marge van onnauwkeurigheid, bijna altijd een zelfde middelmatige monotonie oplevert en, wat daarmee samenhangt, dat de mogelijkheden om 1) overgangen van wolk A naar wolk B te sturen en 2) *specifieke eigenschappen* van zulke wolken te benutten voor het maken van zo'n overgang, uiterst beperkt zijn in zulk proza. Dit nadeel komt er eigenlijk op neer, dat, naarmate een komponist de noodzaak of wenslijkheid van *meer specificiteit* in de samenstelling en struktuur van zo'n wolk inziet, hij ook specifieker in zijn aanwijzingen zal moeten worden. We gaan het probleem daarom wat serieuzer aanpakken en distancieren ons van de middelmatigheid.

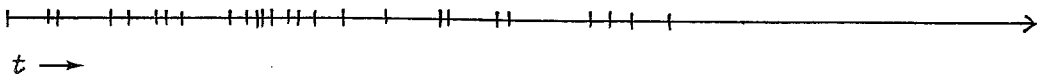
3.1.1. Er zijn talloze mogelijkheden om het probleem op te lossen. De meest adekwate - uit een oogpunt van ekonomie en effektiviteit - moeten wij zoeken in statistiese methoden, die het voordeel hebben dat we ons niet vooe elk pizzicato uit de wolk suf hoeven te piekeren waar we hem nu weer eens neer zullen zetten,[15] maar dat we van de verzameling in zijn geheel uitgaan, en toch mogelijkheden hebben om tot op zekere hoogte zeer specifiek te zijn met betrekking tot eigenschappen die de verzameling karakteristiek kunnen maken. Daarom moeten we een dergelijke verzameling allereerst op statistiese wijze kunnen *beschrijven*.

Elk punt in de hoogte/tijruimte van afb 20 wordt volledig door twee getallen *(t,h)* gedefinieerd: het eerste getal is er een van de schaal op de tijdsas, het tweede van de toonhoogteschaal. Schematies per punt:



afb. 21

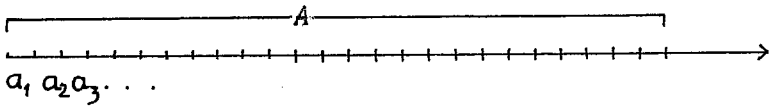
Als we van de wolk in afb 20 alle tijdstippen nu eens op één lijn afbeelden, krijgen we iets dergelijks:



afb. 22

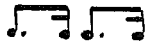
Een dergelijk 'patroon' bezit een *bepaalde graad van onregelmatigheid* die afgewogen kan worden tegen een bepaalde vorm van regelmatigheid. De hoogste vorm van regelmatigheid is die,waarin de voorspelbaarheid van elk punt af te leiden is uit de positie van de twee voorgaande punten, d.i. het *interval* daartussen. In gewone termen: alle punten staan op gelijke afstanden = alle intervallen tussen de punten zijn gelijk.

Stel nu een telraam met één lijn, waarop de balletjes op afstanden staan zoals in afbeelding 22, en de opgave: arrangeer de balletjes zó, dat alle afstanden gelijk worden met dien verstande, dat het eerste en laatste balletje op hun plaats blijven. Deze periodiciteit van de eerste orde [16] bezit op een belangrijk punt verwantschap met de oorspronkelijke figuur: de som van alle intervallen in afb 22 is gelijk aan die van afb 23, of: het aantal balletjes over dezelfde afstand *A* is hetzelfde in beide gevallen. En nog mathematieser: de tussenafstand *a* tussen alle punten van afb 23 is gelijk aan de *gemiddelde* afstand tussen de punten in de figuur van afb 22.



afb. 23

Dit aanknopingspunt houden we vast om in een aantal stadia van regelmaat naar een, laten we zeggen, zo hoog mogelijke graad van onregelmatigheid te verhuizen, d.i. van periodiciteit naar a-periodiciteit.

1) Uitgaande van periodiciteit ven de eerste orde kunnen we ons ontwikkelingen voorstellen naar steeds ingewikkelder vormen van periodiciteit, waarbij zo mogelijk een limiet bereikt wordt die aanwijzingen bevat over de grenzen van periodiciteit en a-periodiciteit. Neem bv een periodiciteit van de tweede orde (a b a b a b . .). In de klassieke en alle andere muziek, waarin *metrum* de belangrijkste ritmiese basiskonseptie is, treffen we meestal een beperkt aantal varianten van deze vorm van periodiciteit aan, zoals  . . . .

. . . . etc

waarin dus zeer elementaire en voortdurend herhaalde onderver-

delingen van één interval (bv ♩ of ♩.) aan de orde zijn. Vaste gegevens zijn in elk geval dat

$$a + b = q \qquad (q \text{ konstant})$$
$$a = nb, \text{ waar } n = \ldots \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, (1), 2, 3, 4, \ldots$$

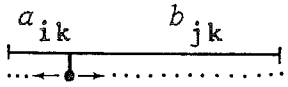
dwz $n \in Q$, n bestaat uitsluitend uit rationale getallen, en dan in de praktijk meestal getallen die zo dicht mogelijk aan weerszijden van 1 liggen. We kunnen n echter ook uit de reële getallen $\mathbb{R}$ laten komen, waardoor we in theorie een oneindig aantal paren $(a_{ik} + b_{jk})$ kunnen konstrueren waarin

$$a_{ik} + b_{jk} = q \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

en $\quad a_i = nb_j$ waarin $\quad n \in \mathbb{R}$

en $\quad a_{i1} \neq a_{i2} \neq a_{i3} \ldots$

Als we in punten (de balletjes op onze telraamlijn) denken: Balletjes 1,3,5,... staan op gefixeerde afstanden van elkaar; balletjes 2,4,6,... daartussen zijn *variabel* = verschuifbaar, theoreties op een oneindig aantal manieren indien we van volledige kontinuiteit uitgaan, dwz van de reële getallen:

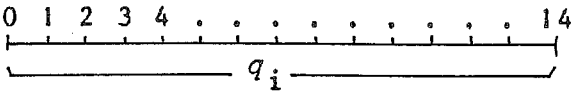


afb. 24

Aangezien we hier praktiese problemen[17)] moeten oplossen, kunnen we ons voor de opgave stellen de balletjes 1,3,5,...25 in afb 23 te laten staan, en de variabele balletjes 2,4,6,...26 te verschuiven (NB. met een fictief balletje 27 om 26 dezelfde ruimte te geven voor het schuiven als alle andere variabelen.) zodanig, dat geen enkel intervalpaar a,b gelijk is. De meest primitieve oplossing verloopt als volgt:

i. We hebben 13 intervallen q $(=a+b)$.
we hebben dus 13 intervallen a en 13 intervallen b.

ii. Als we stellen dat intervallen a en $b > 0$, en dus dat $a_{ik} + b_{jk} \neq a_{ik}$, dan moeten we q in 14 intervallen opdelen, bv gelijke intervallen, en in alle segmenten q_i de variabele bal op een andere positie zetten:



afb. 25

iii. Daarmee hebben we de totaal benodigde *voorraad* intervalparen om ons fragment te kunnen konstrueren. Er zijn weer twee grondbeginselen om nu de volgorde van deze paren te kiezen: maximale regelmaat, mximale onregelmatigheid, met daartussen de overige mogelijkheden. Maximale regelmaat kan nu alleen verkregenworden op déze manier: interval a wordt in elk volgend paar groter, dwz het variabele balletje staat in q_1 op positie 1, in q_2 op 2,...in q_{13} op 13, of omgekeerd. Twee mogelijkheden dus van dezelfde vorm. Het interval b wordt automaties door a bepaald en gaat in tegengestelde richting. Aangezien in ons voorbeeld $a_{i1} = b_{j13}$, of algemener

$$a_n = b_{14-n} \quad \text{met } n = 1,2,3,\ldots 13$$

zijn er in totaal 13 *verschillende* paren die op 13!=6 227 020 800 = ruim 6 miljard *verschillende* manieren in een bepaalde volgorde kunnen komen te staan! (Vgl nog eens voetnoot 15 en de begrijpelijke radeloosheid van een komponist die een oplossing zoekt zonder richtlijnen vooraf...). Daaruit zijn er nog een klein aantal die een zekere richting, een zekre graad van voorspelbaarheid bezitten na een steekproef van 13 observaties. Bv als we de q_i als geordende verzameling nemen, met de index-volgorde van a als kriterium (a van positie 1, naar 2,...naar 13, dwz a_i met i = 1,2,...13) dan is een *ordening* als

$$q_1 \quad q_{13} \; q_2 \quad q_{12} \cdots q_7$$

daar een vertegenwoordiger van. We zien hier weer een voorbeeld van tweede orde periodiciteit! Allerlei vormen van regelmaat hebben te maken met herhaling, met iteratie = voorspelbaarheid.

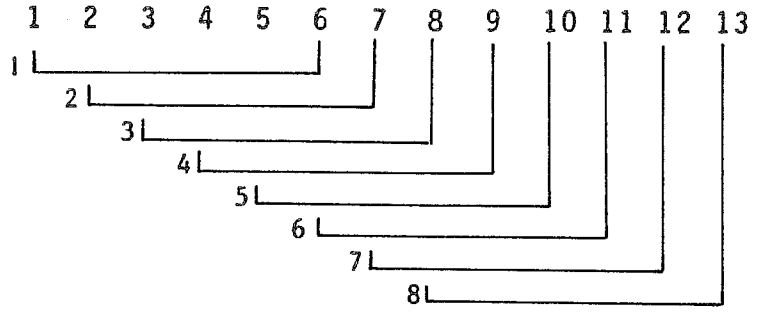
iv. De konstruktie van regelmatige typen kan daarom betrekkelijk gemakkelijk 'met de hand' gebeuren. De onregelmatige typen kunnen we konstrueren met behulp van een *random*-mechanisme, dat vaak beschikbaar is in de vorm van tabellen. We nemen daarvoor de geordende verzameling als uitganspunt, waarin elk intervalpaar genummerd is, en zetten ze in een volgorde die aan zo'n randomtabel is ontleend.[18)] Natuurlijk kunnen we ook 13 genummerde ballen in een vaas doen, deze goed schudden en ze er één voor één uithalen. Er is dan nog altijd kans dat een of ander regelmatig type opduikt, en vooral typen met regelmatige *fragmenten* kunnen te voorschijn komen. Je kan bv de kans uitrekenen, dat er

een fragment van 6 opklimmende paren ontstaat, met behoud van hun oorspronkelijke positie in de reeks! In het schema van afb 26 is te zien, dat er 8 van die aaneengesloten fragmenten zijn. Bij elk van die fragmenten kunnen alle overige 7 getallen in 7! verschillende volgorden geplaatst worden. Tussen alle 8 gevallen bestaat geen enkele overlapping. Daarom is die kans

$$\frac{8 \times 7!}{13!} = \frac{40320}{6227020800} = \frac{1}{154400} = 0.0000064.$$

De algemene formule voor de berekening van de kans dat een aaneengesloten fragment van n getallen uit een reeks van p getallen en op zijn oorspronkelijke plaats, opduikt, is

$$\frac{(p - n + 1) \times (p - n)!}{p!} \qquad \text{met } p \geqslant n$$



afb. 26

Als we de eis, dat elk fragment op zijn oorspronkelijke plaats moet verschijnen, laten vallen, wordt de kans, dat een aaneengesloten fragment van 6 getallen überhaupt ergens verschijnt, 8 maal groter. Immers elk van de 8 fragmenten kan op 8, dwz (13 - n + 1), plaatsen in een reeks van 13 posities voorkomen. Die kans is dus

$$\frac{(13 - n + 1)^2 \times (13 - n)!}{13!}$$

Als we bovendien nog de eis laten vallen dat de 6 getallen per sé elkaars oorspronkelijke opvolgers moeten zijn, hebben we te maken met de kans, dat ergens in een reeks van 13 getallen een aaneengesloten fragment voorkomt van 6 opklimmende getallen. Deze kans nu is samengesteld uit a) het aantal keren dat uit de reeks van 13 getallen er 6 in opklimmende volgorde kunnen voorkomen; (in feite komt het erop neer dat we daarmee precies hetzelfde bedoelen als wanneer we zouden uitzoeken hoeveel *verzamelingen* van 6 getallen er in een reeks van 13 bestaan, zonder dat de volgorde er toe doet - ongeordende verzamelingen dus - immers,

in elk van die verzamelingen komt precies 1 keer een *kombinatie* voor waarin de getallen in opklimmende grootte staan). De uitdrukking voor dit aantal luidt

$$\binom{p}{n} \qquad \text{hetgeen betekent} \quad \frac{p!}{n!(p-n)!}$$

In ons geval $\binom{13}{6} = \frac{13!}{6!7!} = \frac{6227020800}{3628800} = 1716$

b) weer het aantal manieren waarop de overige 13-6=7 getallen in elk van de onder a) genoemde keren gerangschikt kunnen worden, en dit blijft 7! = 5040.

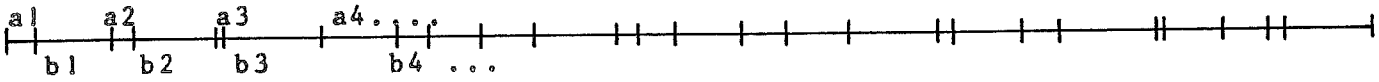
De uiteindelijke kans is dus

$$\frac{(1716) \times (5040)}{6227020800} = \frac{1}{720} = 0.0013888...$$

wat alweer aanzienlijk groter is. De algemene formule hiervoor luidt dus

$$\frac{\binom{p}{n} \cdot (p-n)!}{p!}$$

Een voorbeeld van een echte random-organisatie in deze periodiciteit van de tweede orde met 1 variabel interval op een eenheidsschaal van diskrete waarden, vinden we in afb 27, voor de duidelijkheid iets vergroot ten opzichte van de vorige afbeeldingen.



afb. 27

Natuurlijk komen alle intervallen hier 2 keer voor, omdat in ons systeem alleen interval *a*, dwz het linker interval van elk intervalpaar, als uigangspunt is genomen met *b* als complementair interval, waardoor *b*, in een andere volgorde weliswaar, automaties dezelfde waarden als *a* aanneemt. Er zijn gemakkelijke methoden om dit te verhelpen als men dit ongewenst vindt.

NB. Met het oog bekeken, hebben we, door deze techniek op tweede orde periodiciteit toe te passen, al een aardig onregelmatig patroon kunnen konstrueren. Een goed (en noodzakelijk!) eksperiment zou moeten aantonen of we even veel moeite hebben om met het *oor* de periodiciteit waar te nemen als we met het oog hebben. (mijn hypothese is dat het voor het oor gemakkelijker is.)

3.1.2. Uitgaande van bovenstaande 'oplossing' kunnen we kiezen voor verdergaande complicering door naar derde-, vierde-...n^e-orde periodiciteiten over te gaan.[19)]
Voor de eindige muziekfragmenten die we in het algemeen moeten konstrueren, is dit een mogelijke aanpak en staat hiermee een (theoreties) gefundeerde en (prakties) akseptabele produktiemethode ter beschikking.

Een belangrijke opmerking moet nog over het patroon in afb 27 gemaakt worden. We weten dat het aantal intervallen nog hetzelfde is gebleven als in de afbeeldingen 22 en 23, en dat - als we de schaalvergroting in afb 27 even willen terugbrengen tot die in de beide andere - de *gemiddelde* intervalgrootte in alle drie gevallen ook dezelfde is gebleven. Wat we dank zij onze konstruktiemethode nu echter kunnen doen, is, een tabel samenstellen van de *afwijkingen* van dit gemiddelde en bestuderen hoe die 'voorraad'er uitziet. We weten dat het gemiddelde m uitgerekend wordt door alle intervallen bij elkaar op te tellen ($\sum i$) en deze som te delen door het totale aantal intervallen (N_i), dus

$$m = \frac{\sum i}{N}$$

in ons geval:

$$m = \frac{a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + b_{13}}{26} = \frac{182}{26} = 7$$

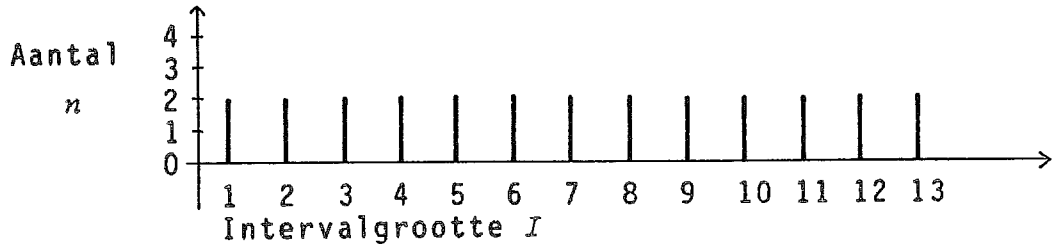
Dat wisten we natuurlijk al, temeer daar we uitgingen van periodes met 14 sub-intervallen (13 posities voor het verschuifbare balletje - zie afb 24) die tegelijkertijd onze schaaleenheid werden. Per periode twee intervallen geeft $\frac{14}{2} = 7$, dwz uitgaande van gelijke kansen voor alle mogelijke afstanden van het verschuifbare balletje. In onderstaande tabel (afb 28) vinden we een overzicht van het door ons gebruikte materiaal. De tabel bevat *statistiese gegevens* over de manier waarop ons materiaal *verdeeld* is. Onze *verdeling* is een uiterst symmetriese, en dit des te meer nu we een belangrijk kriterium voor die symmetrie hebben ingevoerd in de vorm van het begrip gemiddelde, en daarmee de afwijkingen van dit gemiddelde. Ondanks de specifieke manier waarop ons patroon tot stand is gekomen - nog dichtbij het idee van variatie op een basispatroon, hier de tweede-orde periodiciteit - neigt het toch al in een andere richting, een minder deterministiese, vooral als we de orde-indexen opvoeren tot hoogten waarop zeer ingenieuze analyse methoden benodigd

zijn om überhaupt nog periodiciteit te ontdekken.

Aantal n	Intervalgrootte I	Afwijking $(I-m)$	Totale afwijking $n(I-m)$
2	1	-6	-12
2	2	-5	-10
2	3	-4	-8
2	4	-3	-6
2	5	-2	-4
2	6	-1	-2
2	7	0	0
2	8	1	2
2	9	2	4
2	10	3	6
2	11	4	8
2	12	5	10
2	13	6	12

afb. 28

De grafiek (een 'spike-diagram') in afb 29 geeft nog eens extra duidelijk weer hoe elementair onze verdeling is.



afb. 29

Met het konstrueren van ons patroon hebben we eigenlijk een soort tussenstadium bewandeld naar de uiteindelijke verdelingen die Xenakis toepast. Het is een demonstratie van het grote aantal mogelijkehden dat ligt tussen de deterministiese methoden uit het verleden, en de non-deterministiese waar we naartoe werken. Denk bijvoorbeeld eens aan demogelijkheden om schaaleenheden te veranderen, eventueel zelfs geheel te randomiseren op basis van elke door ons gewenste verdeling. Denk eens aan het onnoemelijk grote aantal mogelijke verdelingen dat we kunnen konstrueren. Gemiddelden die kunnen veranderen. Afwijkingen die op geheel andere wijze rondom gemiddelden gegroepeerd zijn etc etc. Aangezien dit boek geen afgesloten overzicht van statistiese begrippen en methoden kan zijn, kunnen we hier slechts verwijzen naar de stortvloed van litteratuur en leerboeken die daarover bestaat. Immers, Statistiek is een zeer wijd verbreide

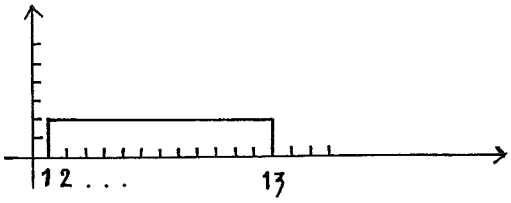
en toegepaste wetenschap in alle mogelijke onderzoeksgebieden, van de menswetenschappen tot de meest eksakt tecniese en abstrakte. Het belangrijkste onderwerp van studie in de statistiek is de *verdeling*. Gebeurtenissen zijn altijd gegroepeerd rondom bepaalde orientatie punten in een verdeling, zoals het gemiddelde en andere *'centra'*. De groeperingen rondom dergelijke centra (de afwijkingen) noemt men dan de *spreiding* van een verdeling. Aangezien statistiek in hoge mate een toegepaste wetenschap is, zijn er een aantal verdelingen (theoretiese) die, voortgekomen uit de bestudering van veel en uiteenlopende verschijnselen, schijnbaar model staan voor een opvallend groot aantal van die verschijnselen. Die maw. vaak voorkomen in de 'vrije natuur', in de allerruimste zin van het woord. De vraag nu, welke van het oneindig grote aantal *mogelijke* verdelingen een komponist zal kiezen voor de diverse daarvoor in aanmerking komende bestanddelen van een kompositie, is door Xenakis beantwoord met verwijzing naar juist deze opvallende feiten uit de niet-deterministiese verschijnselen uit de natuur of rekonstrukties daarvan. Voordat wij ons daartoe gaan bepalen, nog een paar opmerkingen. Er moet met grote nadruk op gewezen worden, dat Xenakis doelbewust gekozen heeft voor die specifieke verdelingen op grond van een daaraan toegeschreven 'algemene geldigheid'. Welnu, dat neemt niet weg

i. dat deze 'modellen' theoretiese konstrukties zijn, behulpzaam bij het begrijpen en sterker nog: het benaderen van bepaalde verschijnselen onder bepaalde omstandigheden;

ii. dat andere verdelingen ook in de 'natuur' voorkomen;

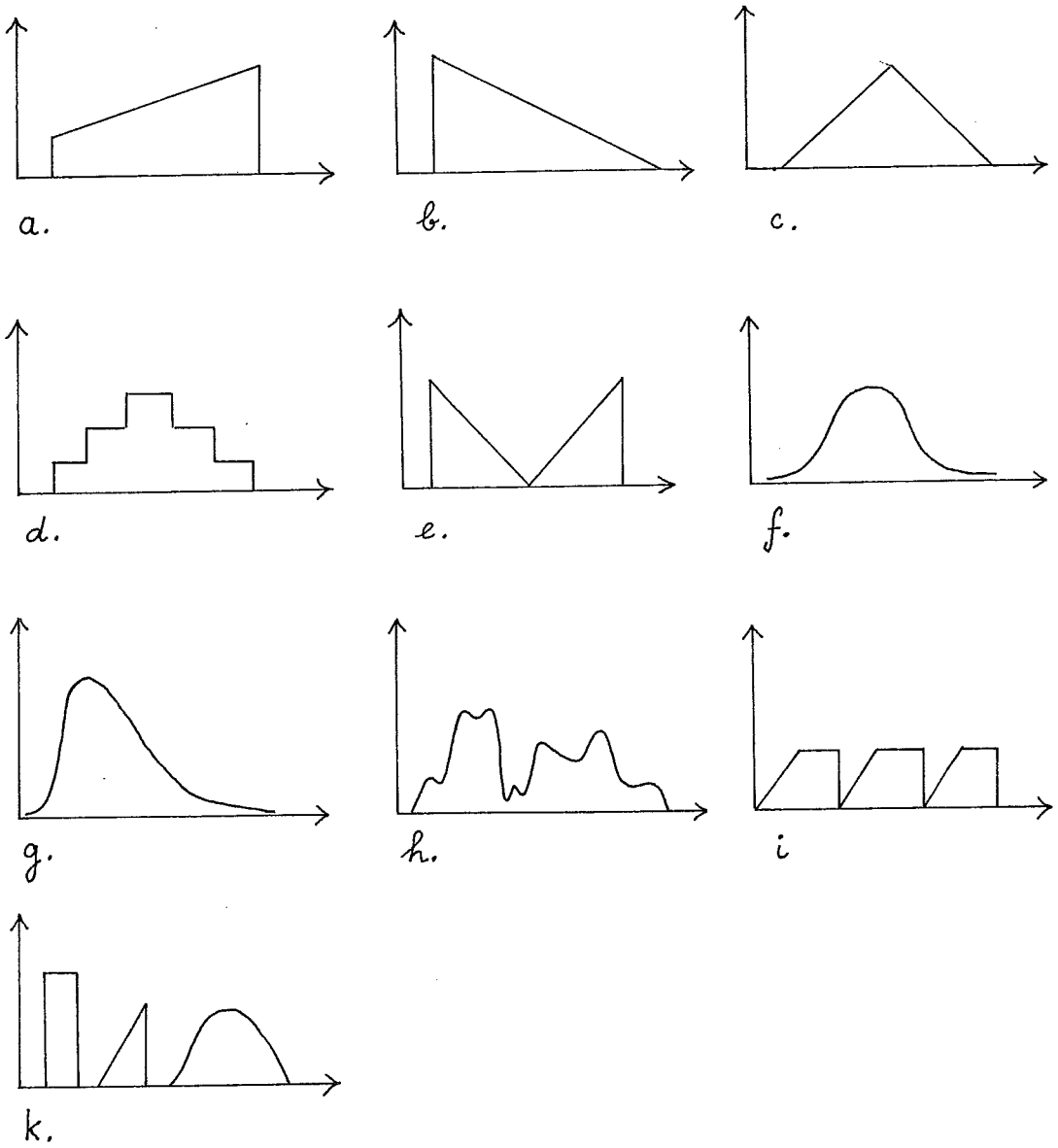
iii. dat we in de kunsten, zo goed als in de wetenschappen (al zijn hier de eisen wel veel strenger) ook volkomen artificiele verdelingen kunnen denken en maken, aangezien de kunsten er allerminst zijn om uitsluitend natuurverschijnselen te imiteren of erger nog: weer te geven, en ook de wetenschappen tot op zekere hoogte tot meer in staat zijn en voor meer dingen dienst doen dan het louter van toepassing zijn op harde feiten.

Als we onze verdeling, zoals die in afb 29 is weergegeven, schematies even als volgt weergeven (zie afb 30), kunnen we snel een aantal algemene typen naast elkaar zetten, die grofweg



afb. 30

indikaties bevatten over mogelijke varianten, waarvan er een paar in de buurt komen van door Xenakis gebruikte typen (afb 31)



afb.31

Op de abcissa (horizontale as) staan telkens de intervalgrootten; op de ordinaat (vertikale as) hun frekwentie, het aantal malen dat de betreffende intervalgrootten voorkomen in een bepaald patroon.

Alweer geldt: ontelbare varianten zijn denkbaar als men alleen

al uigaat van de hier bijeengebrachte typen. Opnieuw dus het fundamentele probleem voor een komponist: welke gebruiken we wanneer? Het spreekt vanzelf dat er legio overwegingen kunnen bestaan om voor deze of gene te kiezen. Elke komponist mag verondersteld worden zijn eigen doelstellingen te hebben bij het maken van een stuk. Daaraan is de keuze van de middelen ondergeschikt. Een gewetensvolle kunstenaar is niet alleen bezig cerebrale grapjes uit te werken, noch staat hij, in het tegenovergestelde geval, onverschillig tegenover de beschikbare middelen (zoals bv de "graphists" en "happeners" waarover Xenakis spreekt in FM p 180/181).

3.1.3. We bedenken dat we nog steeds bezig zijn een oplossing te zoeken voor het probleem van de konstruktie van een pizzicato-wolk zoals getekend in afb 20. Tot zover hebben we ons alleen met de horizontale as bezig gehouden en bij het naderen van Xenakis' oplossing kunnen we ons misschien toch ook al een voorstelling maken van de aanpak van het toonhoogteprobleem, dat daar in verschilllende opzichten mee verwant is. Daarom maken we onze redeneringen op het ritmiese aspekt, i.e. op het gebied van de individuele gebeurtenissen die in grote hoeveelheden over de tijdsas verspreid liggen, eerst af.

Als we de afbeeldingen 29 en 30 nog eens bekijken, en vergeten dat we tot de konstruktie van ons patroon kwamen via een 'ingreep' in tweede-orde periodiciteit, kunnen we ons voorstellen dat een vernuftig mechanisme (alweer...) met de gegevens van haar verdeling 'gevoed' wordt en zonder ophouden tijdsintervallen blijft produceren, dwz afziet van de beperking dat alle intervallen maar twee keer gebruikt mogen worden, maar: gehoorzamend aan de spreiding van de verdeling ten opzichte van het gemiddelde,zodat, als we er op een willekeurige plaats in de tijd een redelijk lang fragment uit halen en een tabel maken van alle daarin geproduceerde intervallen, de verhoudingen en frekwenties weer een verdeling te zien geven die zeer dicht (tegen de 100 % gelijkenis) de oorspronkelijke benadert. Overal moet het gegenereerde patroon tegen dergelijke *steekproeven* bestand zijn.

Merk op, dat het mechanisme nu ook niet meer hoeft te gehoorzamen aan de eis, dat elk opeenvolgend intervalpaar a,b een konstante lengte (periodiciteit) moet hebben.

Er zijn verschillende oplossingen mogelijk voor de konstruktie van dat mechanisme, of eigenlijk: voor de voeding daarvan. We noemen er twee:

i. Het machanisme heeft, met afb 30 gewapend, de keuze uit *alle mogelijke* intervalgrootten die liggen tussen 0 en 14, dwz

$$0 < I < 14 \qquad \text{waarin } I = \{i: i \in \mathbb{R}\}$$

De verzameling reële getallen $\mathbb{R}$ is nu de 'inventaris' van de machine. Hij heeft er slechts voor te zorgen dat een éénmaal gebruikt interval nooit meer terugkomt (geheugen), het gemiddelde over voldoende lange fragmenten gehandhaafd blijft (steekproef-kriterium) en de spreiding eveneens geen schommelingen te zien geeft (daar zijn eveneens statistiese kriteria voor zoals variantie, standaardafwijking e.d. met bijbehorende signifikantie-tests). Dit laatste betekent dus dat de machine verspreid genoeg moet rondgrijpen uit de totale verzameling, zodat een soort *gemiddelde afwijking* konstant blijft. Eventueel kan het kriterium van het nimmer meer gebruiken van een éénmaal gekozen interval ook nog vervallen, immers de voorraad is zo (oneindig)groot, dat een paar doublures geen enkele invloed op het totaal kunnen hebben.

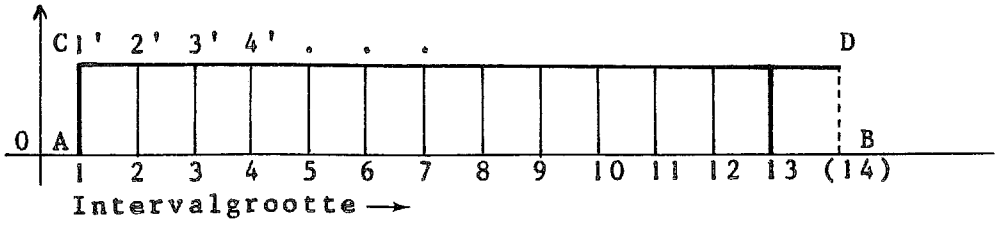
In feite hebben we hier te maken met een STOCHASTIESE VARIABELE. De variabele is I en kan eigenlijk voorgesteld worden als het verschuifbare balletje uit het telraam: indit geval mag het balletje bijna onbeperkt heen enweer schuiven en springen, slechts 'gehinderd' door een paar (statistiese) voorwaarden met betrekking tot de verdeling die gehandhaafd moet blijven: iedere stand van het balletje op de tijds-abcissa stelt een volgend interval (= een reëel getal tussen 0 en 14) voor. De stochastiese variabele is met andere woorden een random-variabele, alleen in zijn bewegingsvrijheid beperkt door een aantal statistiese eisen. Bij het in-werking-treden zorgt de variabele er overal voor, dat de individuele gebeurtenissen altijd *tenderen naar* een bepaalde karakteristieke globaaltoestand (stochos = doel, eindtoestand).

ii. De tweede oplossing voor het mechanisme bestaat in het vervangen van de frekwentieschaal op de ordinaat door een verhoudingen-, een percentageschaal. In dat geval kan namelijk op de abcissa zowel van diskrete (bv de rij van natuurlijke getallen) als van kontinue schalen (zoals de reële getallen) gebruik

gemaakt worden. Ons mechanisme houdt in dat geval geen rekening met aantallen van alle gebruikte intervallen, maar met *onderlinge verhoudingen*. Merk op, dat in oplossing i. het raadplegen van de frekwentieschaal strikt genomen niet nodig was. In plaats daarvan stond de opdracht een éénmaal gebruikt interval geen tweede keer te gebruiken. (wat natuurlijk verwant is met het raadplegen van de frekwentieschaal).

We zien dat het mechanisme weer eindeloos kan genereren, ook al maken we alleen gebruik van diskrete schalen voor de intervalgrootten, hetgeen in de praktijk vrijwel altijd het geval is, teneerste omdat de door ons gebruikte muziek-notatiesystemen in het algemeen geen kontinue waardeveranderingen toelaten (wel sommige grafiese systemen zoals de zgn 'proportionele' notatie[20] - deze wordt daarentegen weer zwaar gehandicapt doordat hij tot grote onnauwkeurigheden bij uitvoeringen leidt omdat lengten en afstanden alleen maar *geschat* kunnen worden binnen bepaalde grenzen); ten tweede, omdat het helemaal niet nodig is: we kunnen, ook op grond van eigenschappen in ons waarnemingsmechanisme, maar in elk geval doordat onze verzamelingen in de praktijk vrijwel altijd *eindig* zullen zijn, volstaan met diskrete schalen. Daarom verdient onze tweede oplossing nadere bestudering. We zetten daarmee tegelijkertijd onze definitieve stappen op weg naar Xenakis' methode.

3.1.4. Als we ons nog even houden aan het voorbeeld van de 13 verschillende tijdsintervallen, zoals afgebeeld in het spike-diagram van afb 29, kunnen we nu een nieuw diagram maken op basis van deze afbeelding en zijn schematiese weergave in afbeelding 30, waarin rekenschap wordt gegeven van zowel de 13 intervallen én hun percentages = hun *relatieve frekwentie*. (zie afb 32)



afb. 32

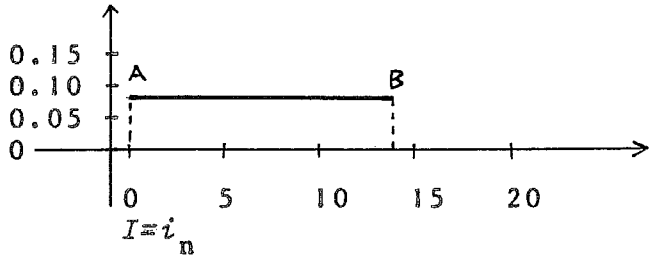
Als we nu de totale *oppervlakte* van ABCD 1 noemen (of 100 %), dat is de totale hoeveelheid materiaal die het mechanisme zal produceren, dan stelt elke rechthoek daarbinnen (bv 1,2,2' 1')

de relatieve hoeveelheid van één bepaalde intervalgrootte voor namelijk 1/13 of $\frac{100}{13}$ = 7,69% van de totale oppervlakte.

Belangrijke opmerking: We hebben een kontinue *dichtheidsverdeling* gebruikt voor diskrete waarden.

Het grote voordeel van deze benaderingswijze van verdelingen is, dat we nu een *type* verdeling hebben die voor zeer veel uiteenlopende interval-verzamelingen gebruikt kan worden. Immers, we kunnen elke hoeveelheid intervalgrootten onderbrengen die we wensen ($1 \leqslant N_i \leqslant \infty$). Bovendien kunnen we, uitgaande van dit type, elke gewenste frekwntieverdeling konstrueren door (in de grafiek) de vorm van de kurve ACDB te veranderen, waardoor de percentages van elk interval of intervalgroep gewijzigd worden. Onze greep op de verdeling wordt tenslotte gewaarborgd door de totale oppervlakte onder de kurve altijd 1 (of 100 %) te laten zijn.

Die *kurve* nu is van groot belang en kan meestal in een algebraiese vorm uitgedrukt of benaderd worden. Inafb 33 staat nogmaals onze kurve afgebeeld.



afb. 33

In 1.1.1. tot en met 1.1.3 hebben we de algebraisering van lijnen (die ook kurven zijn) benaderd vanuit het idee dat een beeldgebied gedefinieerd wordt door een verzameling regels die toegepast worden op een definitiegebied. Ons definitiegebied is de verzameling intervalgrootten; het beeldgebied de ermee korresponderende frekwenties (of percentages). Die *korrespondentie* is de afbeelding en deze moet voldoen aan de regels of eisen die we geformuleerd hebben. In ons voorbeeld is de lijn AB 'de *afbeelding* van frekwenties op intervalgrootten'. Hij wordt verkregen door voor elke waarde van (de stochastiese variabele) I tussen 1 en 14, een bepaalde waarde $f(I)$ in te vullen, waarin f de operator is die, op grond van de volgende definities (regels), zorg draagt voor de effektuering van die afbeelding.

$$f(I):\ i_n \rightarrow k \qquad \text{met} \quad I = i_n$$
$$n = 1,2,3,\ldots p$$
$$pk = 1, \text{ of } k = \frac{1}{p}$$

We zien dat hiermee aan alle eisen kan worden voldaan. In ons voorbeeld is n = 1,2,3,...,13. Elke i_n stelt dus een bepaalde intervalgrootte voor, eventueel allemaal van verschillende afmeting, maar geordend volgens n. Derhalve

$$p = 13 \qquad \text{waaruit volgt}$$
$$13k = 1 \qquad \text{en dus}$$
$$k = \frac{1}{13} \cong 7.69\ \%$$

We kunnen in de operator f ook zien dat, wanneer we p naar ∞ laten gaan, i.e. de machine uit ontelbare intervalgrootten laten kiezen binnen zekere grenzen bv 1 en 14, de kans op een bepaalde intervalgrootte oneindig klein wordt:

$$p \rightarrow \infty \qquad \text{dan}$$
$$\lim k = 0$$

De lijn AB valt in dat geval prakties samen met de horizontale as. Maw. de hoogte van AB, onafhankelijk van de uitgestrektheid van het definitiegebied, wordt beheerst door het aantal waarden binnen dit gebied, én de eis, dat de totale oppervlakte onder de lijn 1 moet zijn. Als we bv maar twee intervalgrootten toelaten met gelijke kansen, dan is p = 2 en k = ½ of 50 %, dwz de hoogte van AB = $f(I)$ = 0.5

Nb 1). Terloops merkten we op dat de intervalgrootten zelf de meest uiteenlopende afmetingen kunnen hebben. Stel bv dat we, uitgaande van ¼ seconde = 𝅘𝅥𝅯, (♩=60), tijdsintervallen *kiezen* van 1,2,6,7 en 10 , dus:

n = 1 = 𝅘𝅥𝅯
2 = 𝅘𝅥𝅮
3 = 𝅗𝅥.
4 = 𝅗𝅥..
5 = 𝅗𝅥‿𝅘𝅥𝅮

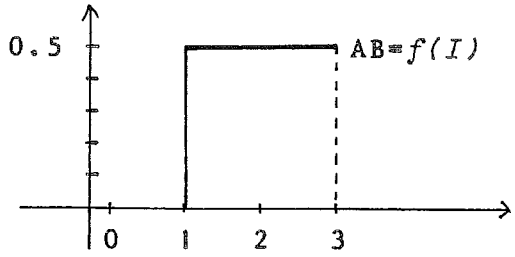
en we wensen hun kansen weer gelijk, dan moeten we dezelde verdeling weer toepassen en de index n gebruiken als definitiegebied, in de wetenschap dat elke n een vastgestelde intervalgrootte voorstelt. Dus

$$p = 5$$
$$\text{en} \quad k = f(I) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Dat wil zeggen dat in ons oude voorbeeld tot nog toe de intervalgrootte korrespondeerde met de index van elke grootte:

1,2,3,...,13. In ons laatste voorbeeld zien we dat dit niet noodzakelijk is, maar wel, dat een ordening via n reglementair vast moet staan.[21)]

NB 2). In het geval van de twee intervalgrootten die elk fifty-fifty staan in de verdeling (of in enige ander verhouding bv forty-sixty) kunnen we nog een sub-onderverdeling toelaten. Neem de fifty-fifty verdeling en neem als intervalgrootten 1 en 2 (bv en). In de grafiek als volgt weergegeven (zie afb 34)



afb. 34

Aangezien de funktie f een *dichtheidsfunktie* is, dwz in principe voor *alle* waarden tussen 1 en 3 voorziet in een frekwentiepercentage, kan een machine bv de opdracht krijgen uit een x aantal waarden binnen de grenzen van de twee intervalgrootteklassen 1 en 2 te kiezen volgens een random- of ander procédé, als de twee intervalklassen zelf maar voortdurend in fifty-fifty verhouding blijven. Bijvoorbeeld kunnen we de twee klassen als volgt onderverdelen:

klasse 1		klasse 2	
♩	(1)	𝅗𝅥	(2)
♩‿♬	(1.25)	𝅗𝅥‿♬	(2.25)
♩.	(1.5)	𝅗𝅥‿♪	(2.5)
♩..	(1.75)	𝅗𝅥‿♪.	(2.75)

Elke klasse heeft hier vier vertegenwoordigers. Elke vertegenwoordiger representeert de klasse volledig, en de machine grabbelt bv willekeurig (random) uit twee vazen waarin de vertegenwoordigers als knikkers opnieuw volgens elke gewenste verdeling (dat wil dus zeggen ook in alle mogelijke andere verdelingen dan de hier toevallig gekozene) opgeborgen zitten.

NB 3). De behandeling van dit 'type' verdeling is met opzet geformuleerd in termen van diskrete waarden, en meer nog: de mogelijkheden demonstrerend van wat op basis daarvan nog aan sub-klssifikaties en ordeningen is aan te brengen binnen dit verdelinstype.

In de waarschijnlijkheidsleer wordt dit type aangeduid als de *rechthoek-verdeling* (omdat de grafiese voorstelling een rechthoek voorstelt) of *uniforme verdeling*, die in principe kontinu is, en waarvan de dichtheidsfunktie als volgt gedefinieerd wordt

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{als } a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{voor alle overige } x. \end{cases}$$

b en a zijn hier de buitengrenzen van het domein van x, in ons geval 1 en 14. Dat klopt met onze vorige berekeningen, immers voor zover x ligt tussen $a=1$ en $b=14$, is

$$f(x) = \frac{1}{14-1} = \frac{1}{13} = 7.69\ \%\ \text{of}\ 0.0769.$$

Voor alle overige waarden van x is de funktie 0. Het totale oppervlak van de verdeling is dan ook automaties 1.

3.2.0. We pakken de pizzicato-wolk opnieuw en storten ons nu in het Xenakis-avontuur. Uit het voorafgaande zal blijken dat de keuze van Xenakis voor een paar specifieke verdelingstypen een louter willekeurige moet zijn. Het heeft niets met specifieke eigenschappen van het muzikale materiaal te maken, maar alleen met een voorkeur van de komponist. Die voorkeur van Xenakis is door hemzelf bij herhaling toegelicht met een aantal voorbeelden uit de 'natuur'. Neem bv het (ritmiese)verschijnsel van een hagelbui op het dak van een huis of auto; het ritme van botsingen van moleculen in een gas in een afgesloten ruimte bij konstante temperatuur; het (ritmiese) verschijnsel van een grasveld vol krekelgeluiden of sloot vol kikkers; het (ritmiese) verschijnsel van geweerschoten bij een charge van de militie tijdens een demonstratie; de (ritmiese en topografiese) opflikkeringen van een door de zon beschenen zee-oppervlak; de (topografiese) verdeling van een bepaalde spinsoort over een afgebakend territorium; het aantal krenten in een snee krentebrood...etc. etc.
Al deze voorbeelden hebben met elkaar gemeen dat ze problemen van grote aantallen en een karakteristieke toevalsfaktor in zich berben. Zij zijn in de statistiek en waarschijnlijkheidsleer uitvoerig bestudeerd en dat is Xenakis' aanknopingspunt.

De voorbeelden zijn met opzet toegespitst op tijds- en ruimtelokalisatie problemen, in casu ritmiese en topografiese. Hun gemeenschappelijke karakteristiek is gelegen in het feit dat beide *dichtheids*problemen zijn. We kunnen het probleem van de pizzicato-wolk langs beide kanten benaderen. Immers in de grafiese weergave ervan, die we om praktiese redenen even als een adekwate weergave zullen beschouwen, kunnen we ons zuiver topografiese oplossingen voorstellen. Deze zijn verwant met de konstruktie van de SCREENS uit 1.3.1. In 1.3.2 hadden we de oplossing nog even uitgesteld. We kunnen daar nu aan gaan werken en zullen met een kleine omweg weer terugkomen op het ritmiese aspekt, de tijdsintervallen, en in tweede instantie ook op de toonhoogte- en dynamiese intervallen als zodanig en afzonderlijk.

3.2.1. De 'topografiese oplossing' is eigenlijk een wat ruwere aanpak dan de gescheiden oplossing voor toonhoogte en rime afzonderlijk. Maar zij is niettemin uiterst reëel en wordt door Xenakis

in verband met de konstruktie van de screens, en in verband met de konstruktie van de grote vorm toegepast. Er zijn dus maw. verschillende niveau's die in aanmerking komen voor een dergelijke oplØssing. Zij zullen straks afzonderlijk aan bod komen. We gaan eerst het probleem op gegeneraliseerde wijze te lijf. De opgave luidt dan: hoe moet ik in een vierkant van de afmetingen als in afb 20 alle stippen over het vlak verdelen om een random-organisatie (-verdeling) te krijgen die verwant is met enige van de bovenstaande voorbeelden uit 'de natuur'.

Het antwoord daarop geeft de zgn POISSON-verdeling (naar de franse mathematicus Poisson, 1781-1840), die een goed mathematies model blijkt te zijn voor dergelijke verschijnselen. Volgens COX & LEWIS (1966) kan dit konsept beschouwd worden als model voor een volledige random-verdeling van gebeurtenissen. Geen enkel verschijnsel uit de werkelijkheid is in volledige overeenstemming ermee, maar velen benaderen het model zeer dicht. In elk toepassingsgebied moet de plausibiliteit ervan opnieuw worden bekeken. De Poissonverdeling en Poissonprocessen moeten daarom gezien worden als wiskundige konsepten of kaders, waartegen verschijnselen kunnen worden afgemeten, begrepen. Dat geldt overigens voor alle logico-mathematiese modellen. Wij benadrukken het feit alleen om geen verwarring te laten ontstaan tussen *verdelingen in de natuur* enerzijds, en de *mathematiese modellen* als begripsbepalingen anderzijds. Waar wij (komponisten) nu vanuit gaan, is het mathematiese konsept! We doen dit door de *onderzoeks-situatie* om te keren tot een *produktie-situatie*.

Als we het aantal treffers na een bombardement moeten lokaliseren op een afgebakend terrein (ruwere aanpak, ruwer voorbeeld) doen we dat door het gebied in sektoren van gelijk oppervlak te verdelen en per sektor het aantal treffers te turven. (zie afb 37)

0	1	1	2	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	0	0	3	0
0	0	2	0	2	0	2	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	1
0	0	0	1	3	0	1	0	0	2	1	0	2	0
0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	2
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	4	0	0	1
1	1	1	0	0	2	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	2	1	1	1	0	0	0	0	2	1	0	0
0	1	1	1	0	0	3	2	2	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	2	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	2	1	3	0

afb. 35

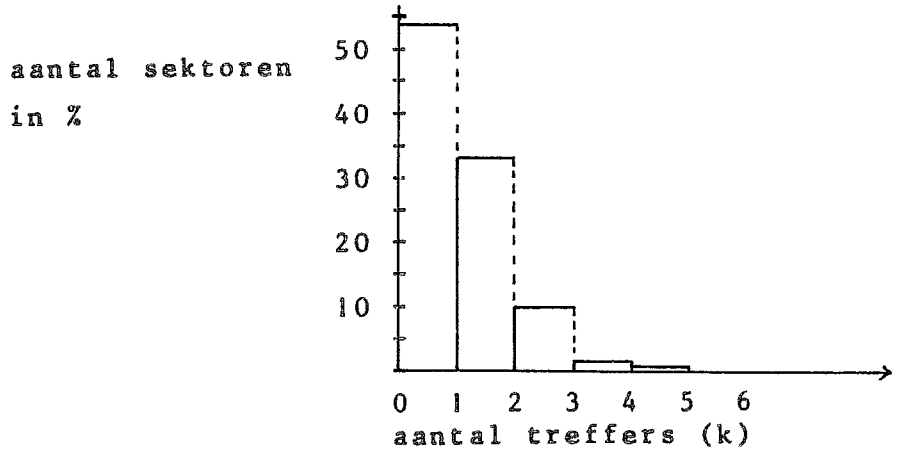
Van de verkregen resultaten maken we een tabel waarin links het aantal treffers, in 't midden het aantal sektoren waarin dat aantal treffers werd geregistreerd, en rechts de totale hoeveelheid treffers staan:

Aantal treffers	Aantal sektoren	Totaal treffers
0	107	0
1	65	65
2	19	38
3	4	12
4	1	4
	196	119

We berekenen vervolgens het gemiddelde aantal treffers per sektor

$$m = \frac{119}{196} = 0.6$$

In een grafiek kunnen we nu de verdeling als volgt weergeven, de aantallen uitgedrukt in percentages:



afb. 36

Kenners van dergelijke verdelingen ruiken nu als het ware dat we hier met een Poissonverdeling te maken kunnen hebben. Zeer fundamenteel bij die konstatering is het feit, dat bij een bestudering van de manier waarop de aantallen over het 14 x14 vierkant gespreid liggen, geen herkenbare tendenzen zijn ontdekt via analyse van de rijen, kolommem, diagonalen of andere deelverzamelingen van sektoren. Dat wil zeggen, in geen van die gevallen zijn duidelijke patronen gevonden bv in de vorm van reeksen of andere configuraties op grond waarvan getallen of groeperingen van getallen voorspelbaar zouden worden. Zodat we tot de slotsom moesten komen, dat de verdeling *random* is. (Er bestaan tests voor dergelijke onderzoekingen). Deze vaststelling, plus

de eigenaardige vorm van de verdeling in onze grafiek (de dalende 'trend' van de verdeling is karakteristiek bij een laag gemiddelde), voeren ons naar de Poissonverdeling, die uitgedrukt wordt in een zgn exponentiele funktie, die de kurve ervan beschrijft, en al in de 19e eeuw schijnt te zijn gebruikt met betrekking tot de kinetiese theorie van de gassen (Cox & Lewis p. 23).

Er zijn dus 3 belangrijke gegevens:

i. de verdeling (spreiding) is random;

ii. het gemiddelde per sektor is laag (0.6 hier);

iii. de vorm van de verdeling lijkt exponentieel.

Het zijn deze 3 basisgegevens die in de frekwentiefunktie van de Poissonverdeling verwerkt zijn:

$$f(k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

waarin k = 0,1,2,... dwz de aantallen treffers;

m = het gemiddelde aantal;

e = de basis van de natuurlijke logaritme; e is een getal ongeveer ter grootte van 2,718..., te vergelijken met π ("pi" = 3,141...) dat, zoals we weten, een getal is om de oppervlakte en omtrek van cirkels en bollen mee te kunnen beschrijven;

$e^{-m} = \frac{1}{e^m}$ (andere schrijfwijze dus);

$k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k.$

De Poissonverdeling is dus DISKREET, omdat het gaat om percentages van treffers waarin elke treffer met een heel getal uitgedrukt wordt, vermeld op de abcissa. De funktie is een STOCHASTIESE funktie, omdat de variabele k random is, zowel met betrekking tot ruimte (zoals het oppervlak van een territorium, of de inhoud van een krentebrood) als tot tijd (het aantal opflikkeringen van een kapotte neonbuis in tijdseenheden). De funktie heeft tenslotte maar één enkele PARAMETER: het gemiddelde m, waaromheen de totale verdeling (spreiding) draait, op de karakteristieke Poisson wijze.

3.2.2. Wat we nu gaan doen, is dus het omgekeerde:

i. We wensen bv een Poisson-verdeling voor onze pizzicato-wolk;

ii. Over een tijd x toonhoogteveld met m x n sektoren;

iii. En een (gekozen) gemiddelde *m*.

We kunnen de Poisson-formule nu laten genereren, gewapend met de gekozen a-priori's. Daarvoor zijn tabellen in de handel (veel leerboeken over waarschijnlijkheidsleer hebben die in hun appendixen staan), waarin we kunnen lezen hoe groot de percentages (kansen!) zijn waarmee de respektieve k's, gegeven een bepaalde (gekozen) *m*, optreden. (Zie bv Derman/Gleser/Olkin 1973) Er bestaan ook boeken met uitsluitend tabellen van waarschijnlijkheids- en statistiese verdelingen, bv 'Handbook of Tables for Probabilities and Statistics', 2nd ed., William H.Beyer, ed. (Cleveland: The Chemical Rubber co.)

VOORBEELD:

Stel dat we een tijd x toonhoogteveld maken van 7 oktaven (de gangbare omvang van een piano), genummerd I,II,...,VII; en 10 seconden genummerd 1,2,...,10.

Stel vervolgens dat we een gemiddelde dichtheid wensen van 4 noten per seconde, dus $m = 4$.

De tabel geeft dan de volgende percentages = verdeling voor k:

k =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(k) in % =	1.83	7.33	14.65	19.54	19.54	15.63	10.42	5.95	2.98	1.32

...k (vervolg)	10	11	12	13	14
...f(k)	0.53	0.19	0.06	0.02	0.01

NB. Merk op, dat er een 'tendens' is in de verdeling, dat de percentages oplopen tot k het gemiddelde *m* bereikt heeft, en daarna weer zakken. Dat geldt (bij benadering) als een van de belangrijkste karakteristieken van de Poissonverdeling. Een bijzonderheid, die ermee samenhangt, is, dat, naarmate men het gemiddelde hoger neemt, de Poissonverdeling steeds meer gaat lijken op de 'Normale Verdeling' (Gaussiese) waarvan de hoofdeigenschap is, dat de afwijkingen links en rechts van het midden elkaars spiegelbeeld zijn, of, maw. dat de verdeling symmetries is ten opzichte van het gemiddelde. Over deze verdeling zullen we nog uitvoerig spreken.

Deze tabel moet nu 'aangepast' worden aan onze pizzicato-

ruimte, die 7 x 10 = 70 sektoren bevat. (Een sektor is in ons geval een oktaafgebied met een duur van 1 seconde). In de rij met de spreidingspercentages staan nu de *relatieve hoeveelheden* sektoren vermeld waarin de diverse k's (het aantal pizzicato's per sektor) terecht moeten komen. Bv in 1.83 % van onze 70 sektoren komen 0 pizzicato's voor. Bij een totaal van 70 moeten we dus dit percentage met $\frac{70}{100}$ = 0.7 vermenigvuldigen. Dit doen we met alle percentages. Dan ronden we de uitkomsten af. Als kontrole zetten we daarachter nog de uitkomsten van het aantal sektoren x het aantal pizzicato's, tellen die op, en moeten dan r x t x m = 10 x 7 x 4 = 280 pizicato's krijgen in totaal. Aangezien we ten gevolge van het afronden kleine veranderingen aanbrengen, kan het nodig zijn een kleine aanpassing te maken als we prijs stellen op een zo dicht mogelijke benadering van deze 280 in totaal. In onderstaande tabel (afb 37) hebben we 0.37 afgerond (aangepast) tot 1, om nog 10 ekstra pizzicato's te krijgen, zodat we op een totaal van 283 uitkomen i.p.v. op 273, en bovendien op een totaal van 70 sektoren i.p.v. 69.

aantal pizz per sektor k	percentage sektoren $f(k)$	0.7 x $f(k)$	afgerond aantal sektoren s	totaal aantal pizz. kxs
0	1.83	1.28	1	0
1	7.33	5.13	5	5
2	14.65	10.25	10	20
3	19.54	13.68	14	42
4	19.54	13.68	14	56
5	15.63	10.94	11	55
6	10.42	7.29	7	42
7	5.95	4.16	4	28
8	2.98	2.09	2	16
9	1.32	0.92	1	9
10	0.53	0.37	1	10
11	0.19	0.13	0	0
12	0.06	0.o42	0	0
13	0.02	0.014	0	0
14	0.01	0.007	0	0
	100.00	69.983	70	283

afb. 37

Merk tenslotte op, dat de verwerking van m=4 in de verdelingsfunktie

$$f(k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

ons 'automaties' het juiste (en verwachtte) totaal van 280 (althans, na afronding bij benadering) heeft opgeleverd.

We gaan nu een schematiese weergave maken van onze wolk door een toonhoogte/tijdruimte te tekenen (zie afb38) en daarin de aantallen *random* te verdelen. We gebruiken daarvoor een tabel met random-getallen: elke sektor krijgt een eigen nummer (1,2, 3...70); vervolgens nummeren we elke sektor apart in de kolom s van afb 37 als volgt:

s	1	5	10	14	14	11	7	4	2	1	1
s_i	1	2-6	7-16	17-30	31-44	45-55	56-62	63-66	67-68	69	70
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tenslotte lezen we uit een of andere ons ter beschikking staande tabel een randomvolgorde af. Deze geeft bv

33	18	54	11	48	69	09	08	28	53
19	21	51	56	65	38	37	07	60	10
39	59	52	63	13	12	40	27	55	47
50	41	30	35	01	04	32	66	17	02
62	25	64	26	68	03	34	46	29	42
06	31	20	45	57	36	58	49	22	67
61	70	44	16	43	14	15	23	24	05

Stel dat we sektoren in de toonhoogte x tijdruimte per rij van links naar rechts en vanaf de bovenste rij nummeren van 1 tot 70. Dan noteren we

k = 4 in sektor 1, want 33 in s_i geeft k = 4

k = 3 in sektor 2, want 18 in s_i geeft k = 3

k = 5 in sektor 3, want 54 in s_i geeft k = 5

k = 2 in sektor 4, want ....etc

4	3	5	2	5	9	2	2	3	5
3	3	5	6	7	4	4	2	6	2
4	6	5	7	2	2	4	3	5	5
5	4	3	4	0	1	4	7	3	1
6	3	7	3	8	1	4	5	3	4
1	4	3	5	6	4	6	5	3	8
6	10	4	2	4	2	2	3	3	1

afb. 38

De laatste stap in onze 'ruwe' oplossing bestaat in het plaatsen van de pizzicato's binnen elke sektor. In zekere zin is dat dezelfde opgave als het konstrueren van de totale (twee-dimensionale) ruimte, nu echter per sektor. De sektor is ook een toonhoogte/tijdruimte: de toonhoogte-as heeft een 'lengte' van 1 oktaaf, de tijds-as van 1 seconde. "Normaal' gesproken delen we het oktaaf in 12 kleine sekundes, maar aangezien niets ons let om een andere onderverdeling toe te passen (vgl hfdst 2) en we

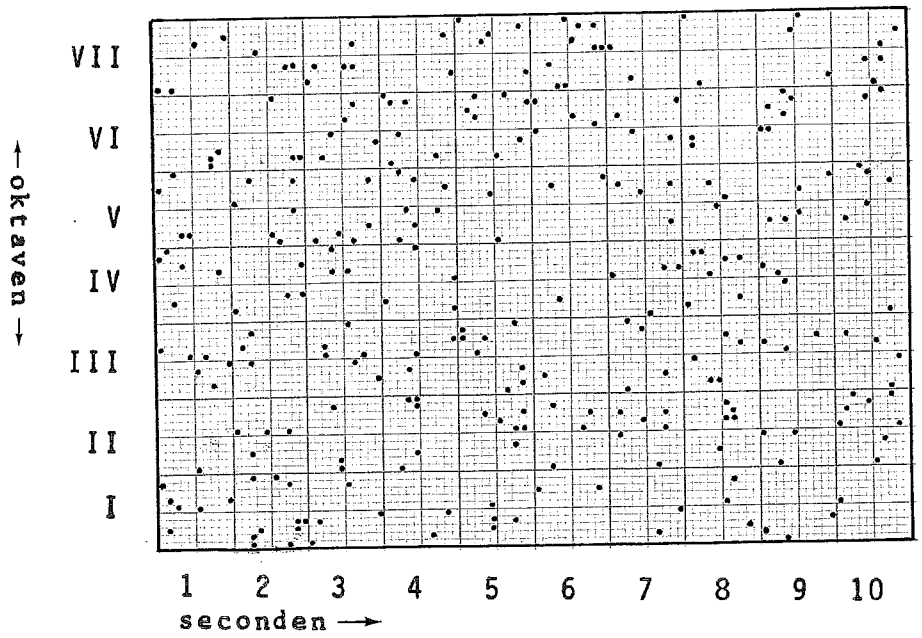
toevallig grafiekpapier in cm^2's hebben, gaan we voor het gemak even uit van oktaven die in 10 intervallen van gelijke lengte onderverdeeld zijn. Ook op de tijds-as nemen we voor elke seconde 1 cm en gaan uit van 10 plaatsen per seconde.[23] Afgezien van de mogelijkheid om per sektor weer een specifieke verdeling te kiezen ten opzichte van een of ander fictief centrum, (bv een Poissonverdeling rondom een gemiddelde m = k/100 per sektor, of een verdeling met een topografies centrum (t,h) = (5,5)) kiezen we hier voor een random-oplossing op grond van drie belangrijke eigenschappen van de Poissonverdeling, die nu eenmaal toch ons uitgangspunt is:

i. De verdeling is (in de oneindige ruimte gezien) overal dezelfde, dwz er is geen bepaalde trend in de serie gebeurtenissen noch in plaats noch in tijd;

ii. de kans dat twee punten (in de ruimte en/of tijd) samenvallen, is verwaarloosbaar;

iii. de kans op een gebeurtenis ergens op plaats p of op tijdstip t, is onafhankelijk van de gebeurtenissen op plaatsen of tijdstippen die aan p resp. t 'voorafgaan'.

Deze drie eigenschappen pleiten derhalve voor een *random* verdeling en we gaan daarom in elke sektor van 10x10=100 plaatsen weer werken met een random-mechanisme, zoals de randomtabellen die we al eerder gebruikten, na eerst elke vierkante millimeter weer genummerd te hebben op de wijze waarop de sektoren genummerd waren. Het resultaat staat in afb 39.



afb.39

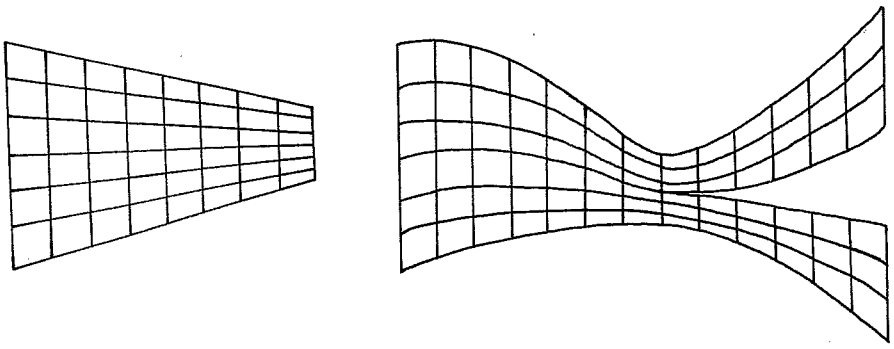
Vergelijk deze afbeelding met afb 38.
Nog een enkele opmerking met betrekking tot de Poissonverdeling. Als Xenakis spreekt van 'rare events' (événements rares) dan bedoelt hij o.a. de *extreme gevallen* uit zo'n verdeling, dwz de gevallen die het verst van het gemiddelde afwijken, in onze pizzicato wolk de sektor met k=10 en k=0. Volgens Xenakis zorgen deze extremen ervoor, dat strukturen komplexer en dynamieser worden. Zij worden in de heersende symmetrie binnengevoerd via de wetten van het toeval (zoals Poisson) en werken als esthetiese prikkels. Wij komen daarop nog terug, ook in ons kommentaar.

De minder 'ruwe' oplossing gaan we aanpakken bij de beknopte beschrijving van ACHORRIPSIS, waar dan meteen de konstruktie van een kompositie in zijn totaliteit aan de orde komt. Overigens is deze topografiese oplossing wel de grondslag voor de konstruktie van de screens geweest.
(NB; de 60 musici uit 3.1.0 krijgen nu elk $\frac{283}{60}$ = plm 5 pizzicati te spelen. De komponist verdeelt ze over de instrumenten)

3.2.3. (PARENTHESE)

Nu we de wolk eindelijk hebben kunnen konstrueren, wijzen we nog op een aantal mogelijkheden die nu in het verschiet liggen. Afgezien van het belang dat we kunnen stellen in het beheersen van bepaalde soorten a-symmetrie, ongeordendheid etc, in de konstruktie van mengsels als deze, kunnen we, met de Poisson-distributie gewapend, talloze tijd x toonhoogtevelden konstrueren door geleidelijke of abrupte veranderingen aan te brengen op de volgende niveau's:

i. De uiterlijke vorm van het gekadreerde veld zelf. Deze kan op alle mogelijke manieren gemodelleerd worden. Twee voorbeelden staan in afb 40.



afb. 40

ii. De afmetingen van de sektoren, of het aantal sektoren per grondoppervlak. NB. in de figuren van afb 40 hoeven we niet noodzakelijk de vorm of oppervlakte van de sektoren mee te laten veranderen. We kunnen eenvoudig door de sektoren heen snijden.

iii. Het gemiddelde en/of de afwijkingen van de Poissonverdeling.

iv. Kombinaties van veranderingen als in i, ii, en iii.

Indikaties over dergelijke transformaties hebben we al een keer uit de mond van Xenakis opgetekend in 3.0.3 punt 3, a, b, c en d.

Tenslotte mag uit de hoeveelheid rekenwerk, die voor dergelijke konstrukties nodig is, opgemaakt worden, dat het inroepen van de hulp van een computer niet verwonderlijk is. Zonder ook maar enig 'essentieel' werk uit handen te geven, blijft er nog altijd zoveel 'vuil' werk over, dat men wel een enorme stijfkop moet zijn om niets te delegeren van wat zo gemakkelijk en snel door machines gedaan kan worden. Overigens zijn de tabellen die we gebruikten al van die hulpmiddelen die veel rekenwerk besparen.

3.3.0. ACHORRIPSIS

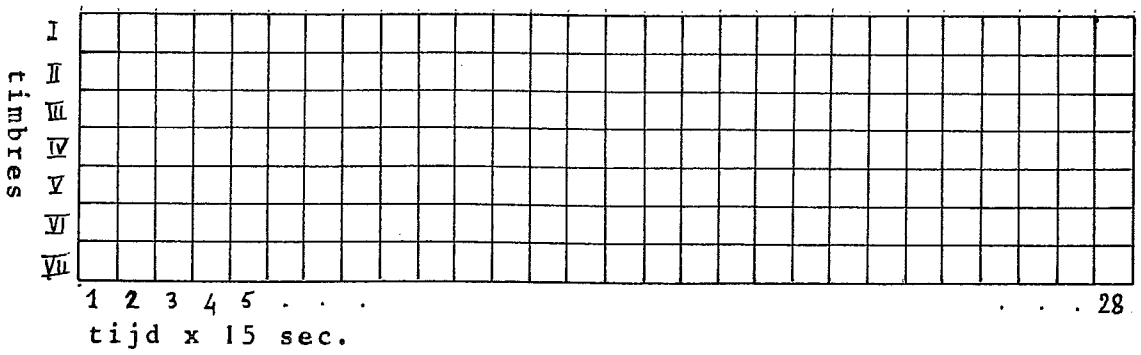
Achorripsis (1956-57) is gebaseerd op een "MINIMUM AAN KOMPOSITIE-REGELS". Het was de opzet van Xenakis een werk te maken dat op alle mogelijke niveau's een gesloten en vanuit één gedachte gekonstrueerd geheel zou zijn. De hele kompositie is gebaseerd op de Poissonverdeling en, waar deze niet toereikend is, op met Poisson verwante of althans deze zo dicht mogelijk benaderende verdelingen.

i. Xenakis heeft het orkest onderverdeeld in 7 timbres:

I - hout-zacht (picc, besklar. en basklar)
II - hout scherp (hobo, fagot, kontrafagot)
III - strijkers-glissandi (3viol, 3 vcelli, 3 Cbassen)
IV - slagwerk (xylofoon, woodblock, grote trom)
V - strijkers-pizzicati
VI - koper (2 trompetten, 1 trombone)
VII - strijkers-arco normale.

ii. De totaalduur van het stuk is (willekeurig) op 7 minuten gezet. Deze 7 minuten weer onderverdeeld in 28 eenheden van 15 seconden. (in de partituur korresponderend met 6½ maat à MM=26 of ♩=52).

iii. Daarmee is een plattegrond van het stuk gedefinieerd als een 7 x 28 matrix (196 'cellen') waaroverheen een Poissonverdeling uitgezet wordt met gemiddelde m = 0.6 (eveneens vrije keus), derhalve de verdeling die we besproken hebben in 3.2.1, zij het dat de matrix niet zoals in afb 35, 14 x 14 is, maar 7 x 28, zijnde de 7 timbres op de ordinaat, en de 28 tijdseenheden op de abcissa. (Zie afb 41)



afb. 41

iv. De Poissonverdeling met m = 0.6 leverde de volgende tabel voor k en het aantal bijbehorende cellen ('sektoren' in 3.2.1):

k	Aantal cellen
0	107
1	65
2	19
3	4
4	1
	196

Afb. 42

De afzonderlijke k's noemt Xenakis voorlopig de nul-gebeurtenis, de enkele, dubbel, tripel en quadrupel-gebeurtenis. Hij heeft ze uiteindelijk gedefinieerd in termen van dichtheid dwz aantallen tonen per seconde. In afb 43 staan ze schematies weergegeven. Het kriterium voor de respektieve dichtheden is geweest, dat een normaal orkest ongeveer 10 tonen per seconde maximaal zou kunnen spelen.[22)] In onze afbeelding staan, om de gedachten te bepalen, de dichtheden ook nog uitgedrukt per maat en per cel van 15 seconden.

k	aantal tonen per sec	aantal tonen per maat (=52)	(gemiddeld) aantal tonen per cel ($6\frac{1}{2}$ maat)
0	0	0	0
1	2.2	5	32.5
2	4.4	10	65
3	6.6	15	97.5
4	8.8	20	130

afb. 43

NB. bij dichtheden per cel staat 'gemiddeld' dwz dat Xenakis per cel nog kleine afwijkingen rond deze gemiddelden zal toelaten. In de uiteindelijke matrix M zijn deze schommelingen aangegeven in dichtheden *per maat*. Een voorbeeld van de schommelingen voor de 65 keer dat de enkele gebeurtenis k=1 optreedt, staat in de tabel van afb 44, waarin duidelijk te zien is dat er onder en boven de 5 tonen per maat globaal gelijke afwijkingen staan. Xenakis vermeldt niet hoe hij aan deze *verdeling* komt, maar hij ziet er grofweg uit als een Normale (gaussiese) met m=4.946. (afgerond 5) Over deze verdeling wordt verderop uitvoeriger ingegaan.

aantal tonen per maat	frekwentie verdeling
2.5	1
3	0
3.5	6
4	10
4.5	10
5	15
5.5	7
6	9
6.5	7
	65

afb. 44

Bij k=3, waar de gemiddelde dichtheid per maat 15 is en 4 keer optreedt, treffen we de dichtheden 14, 15, 16 en 17 aan; Het is mogelijk dat Xenakis eenvoudig per k een verdeling heeft genomen met een zodanige onder- en bovengrens, dat de verschillende dichtheden per verschillende k niet in elkaar overlopen en dus ook voor het oor makkelijker van elkaar onderscheiden kunnen worden.

v. In onze 'ruwe' aanpak in de vorige paragrafen, verdeelden we de k's op een random-manier met behulp van speciaal daarvoor bestaande random-tabellen over de sektoren of cellen van de toonhoogte/tijdruimte. Ofschoon we geen onderscheid *hoeven* te maken tussen zo'n ruimte en de timbre/tijdruimte-matrix van Achorripsis, heeft Xenakis toch voor een andere oplossing gekozen, om nog op nadrukkelijker wijze de Poisson-organisatie te honoreren. Deze oplossing verloopt als volgt. We volgen hier het voorbeeld van de enkelvoudige gebeurtenis k=1, die in 65 cellen moet optreden.

- Stel, je hebt 65 gebeurtenissen (65 x (k=1))
- Stel vervolgens dat deze over 28 kolommen verdeeld moeten worden.
- Dan kan dat wederom een Poissonverdeling worden. Immers, we kunnen onmiddellijk een gemiddelde m berekenen, want

$$m = \frac{65}{28} = 2.32$$

- De te berekenen x wordt dan 'het aantal cellen per kolom waarin de enkelvoudige gebeurtenis moet optreden'.

Aangezien schrijver dezes alleen beschikt over Poissontabellen met gemiddelden tot 1 cijfer achter de komma, kon de volgende tabel worden samengesteld op basis van m = 2.3. Klaarblijke-

lijk heeft m=2.32 een minimale verandering tot gevolg in de uiteindelijke afrondingen van de verdeling - de korrektie kan ook nodig geweest zijn om het totaal in de rechterkolom op 65 te krijgen - de twee getallen tussen haakjes stammen uit de verdeling die Xenakis geeft (afb 45):

x	percentage kolommen $f(x)$	aantal kolommen $28f(x)$	aantal kolommen afgerond	ter kontrole: x x kolommen
0	0.1003	2.8084	3	0
1	0.2306	6.4568	6	6
2	0.2652	7.4256	7 (8)	14 (16)
3	0.2033	5.6924	6 (5)	18 (15)
4	0.1169	3.2732	3	12
5	0.0538	1.5064	2	10
6	0.0206	0.5768	1	6
7	0.0068	0.1904	0	0
			28 (28)	66 (65)

afb. 45

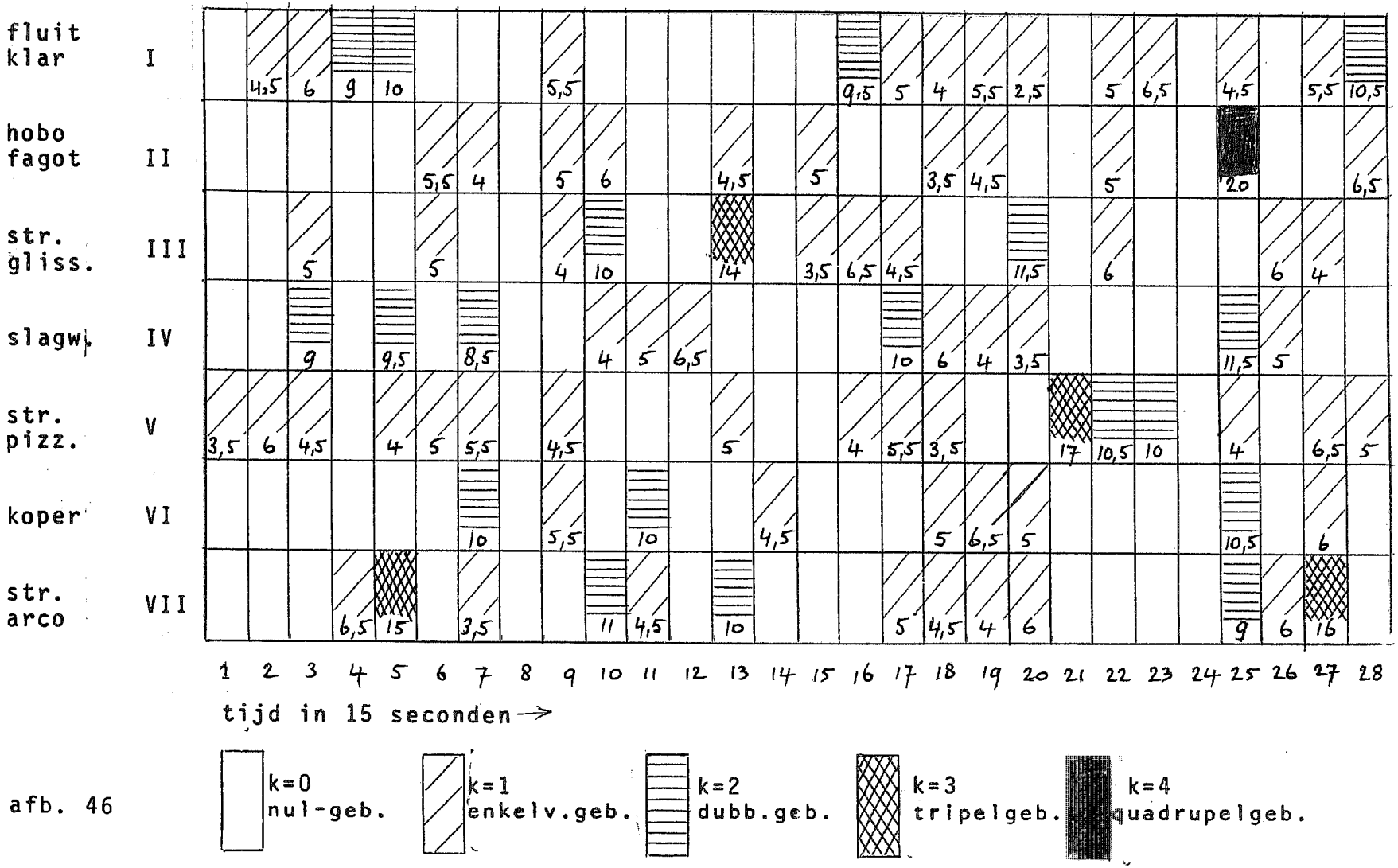
Nu weten we dat er in 3 kolommen geen enkele 'enkelvoudige gebeurtenis' (k=1 of plm 5 tonen per seconde) mag optreden; dat in 6 van de 28 kolommen 1 enkelvoudige gebeurtenis, in 8 kolommen 2...etc. En elke enkelvoudige gebeurtenis neemt een hele cel in beslag.

Op dergelijke wijze heeft Xenakis ook de overige k's 'verdeeld' over de kolommen, ofschoon natuurlijk met de natte vinger een verdeling voor de 4 x (k=3) en de 1 x (k=4) bedacht kan worden.

Tenslotte heeft Xenakis *ook voor de rijen* deze verdelingsprocedure toegepast, zodat een vrij rigoureuze Poisson-wetmatigheid op een aantal manieren de gehele 'plattegrond' van Achorripsis beheerst.

vi. De laatste operatie op de basismatrix M van Achorripsis is de volgende geweest. Uitgaande van een willekeurige randomtoestand van de matrix, op basis van alle tot nu toe verkregen gegevens, is Xenakis 'a work of patient research' begonnen door voortdurend rijen en kolommen tegen elkaar uit te wisselen. Want de matrix kan op heel veel manieren aan de Poissonverdeling blijven beantwoorden, net als de pizzicato-sektoren in afb 39 op vele manieren gerangschikt kunnen worden zonder de karakteristieke eigenschappen van de verdeling te verstoren.

MATRIX M

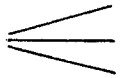


afb. 46

sterktegraden

MATRIX M

	$\frac{1}{3}f$ $\frac{2}{3}p$	p	p 1)	p				ff							$\frac{2}{3}f$ $\frac{1}{3}ff$	$\frac{2}{3}f$ $\frac{1}{3}ff$	ff	ff	f		ppp	ppp		ff		f	f
					f	f		ff	p			pp		$\frac{2}{3}mf$ $\frac{1}{3}f$			ff	ff			ppp			ff			f
		mf			ff			ff	ff			p		p	p	p			ff		f				fff	fff	(fff) 3) 4)
		$\frac{2}{3}pp$ $\frac{1}{3}mf$		$\frac{2}{3}pp$ $\frac{1}{3}mf$		$\frac{2}{3}pp$ $\frac{1}{3}mf$			$\frac{2}{3}pp$ $\frac{1}{3}mf$	$\frac{2}{3}f$ $\frac{1}{3}ff$	pp					f p fff	ff p fff	f	p 2)				$\frac{1}{5}ff$ $\frac{1}{5}p$ $\frac{3}{5}ppp$	4) ff f	ff f		
f	f	f		ff	ff	ff	ff 4)	f				f p?			mf	ff	fff			pp	pp	pp		fff		f	f
						p		mf		ff			$\frac{2}{3}ppp$ $\frac{1}{3}mf$ sord.				f sord.	f sord	p sord					f		pp	
			f	f		f	f 4)		fff	fff		mf				f	fff	fff	fff					ff	ff	ff	

1) met 3 noten ff
2) met 3 noten f
3) ingreep komponist:  (trem.)

4) opvulling met extreem lage dichtheid

afb. 46a

Dit is een van de redenen waarom we hier met een *non-deterministies* mechanisme te maken hebben. Een beperkende faktor bij deze ingrepen is echter dat men de rijen en kolommen niet willekeurig mag verplaatsen: ze moeten twee-aan-twee van plaats verwisselen en de uitganstoestand moet bestand zijn tegen tests die het randomkarakter kontroleren.

Een van de belangrijkste bemoeienissen van Xenakis in dit geduldige schuifwerk van aftasten en beoordelen, is ongetwijfeld uitgegaan naar die éne exceptionele gebeurtenis k=4 (waarin de hoogste dichtheid bereikt wordt), die niet zonder reden voor tegen het eind *'bewaard'* is... We moeten verder raden naar de overwegingen die de doorslag hebben gegeven voor de uiteindelijke toestand van de matrix. Een belangrijk feit is echter, te weten dat Achorripsis in principe op meerdere manieren realiseerbaar is. Xenakis heeft die mogelijkheid niet vrijgegeven, maar gekozen voor het maken van nieuwe stukken (de stochastiese familie) die opnieuw het stempel van ZIJN keuze moesten dragen. In afb 46 is de definitieve versie afgebeeld.

3.3.1. We gaan nu kijken naar de detail-konstruktie van één van de cellen tw. cel 17,III, de cel waarin strijkersglissandi moeten komen met een gemiddelde dichtheid van 4.5 glissandi per maat. (of 29 glissandi in de hele cel, i.e. 6½ maat, in de partituur korresponderend met de partijen van vl 3, vcl 2 en Cb 2 vanaf maat 104 tot in maat 110.

Voor de volgende aspekten van zo'n glissando-veld moeten procedures ontworpen worden:

- tijdstip waarop elk glissando inzet;
- duur van elk glissando;
- snelheid van elk glissando;
- toonhoogte-/registerligging;
- sterktegraden.

Voor twee aspekten heeft Xenakis 'bijzondere oplossingen' gebruikt tw. 1) voor de duur van elk glissando heeft hij in dit geval het kriterium gebruikt dat elk glissando duurt tot de volgende begint, *per instrument*. Het komt erop neer dat de drie strijkinstrumenten elk afzonderlijk zonder onderbreking glissando spelen. 2) voor de dynamiek heeft Xenakis een oplossing die

niet veel meer inhoudt (zo te zien) dan een verdeling van zeer elementaire sterktegraden per cel en per timbre over het gehele stuk heen. Als voorbeeld volgt hieronder een tabel met de sterktegraden van de koperinstrumenten over de 9 cellen waarin ze achtereenvolgens optreden (vgl ook afb 46a):

kolom	7	9	11	14	18	19	20	25	27
sterkte	*p*	*mf*	*ff*	*ppp* *mf* sord	*f* sord	*f* sord	*p*	*f*	*pp*
m/maat	10	5.5	10	4.5	5	6.5	5	10.5	6

Uit dit ene voorbeeld is het voorbarig om konklusies te trekken voor de manier waarop Xenakis de sterktegraden verdeeld heeft, en de mogelijke verbanden met bv de dichtheden. Dit is gemakkelijk na te gaan. Het is eveneens gemakkelijk een distributie te bedenken die uitgaat van een gemiddelde sterkte (bv *mf*) met daaromheen de overige sterktegraden op symmetriese wijze gespreid. De toekenning van een sterktegraad per cel kan weer op een random-wijze geschieden. We zullen ons er nu niet mee bezig houden, ofschoon we benadrukken, dat de sterktegraden uitgedrukt kunnen worden in intervallen (dB) en daarom op analoge wijze als toonhoogte- en dichtheidsintervallen behandeld kunnen worden. In Achorripsis is dat niet gebeurd. In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe Xenakis dit in de ST-stukken heeft aangepakt.

Blijven over:

i. tijdstip van inzet

ii. snelheid/schuinte per seconde

iii. toonhoogte-ligging.

3.3.2. De verdeling die Xenakis kiest voor het uitzetten van de tijdstippen waarop de 29 glissandi inzetten, is een variant van de Poissonverdeling die we zojuist behandeld hebben. Ging die over de verdeling van *aantallen* gebeurtenissen, de verdeling die we nu bekijken gaat over de *intervallen tussen* gebeurtenissen. De verwantschap blijkt duidelijk als we ze even naast elkaar zien

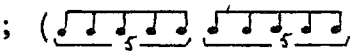
(a) $f(x) = \frac{m^x}{x!}e^{-m}$ (b) $f(x) = me^{-mx}$

Onze nieuwe formule (b) is desondanks ook op een fundamenteel onderdeel verschillend van (a), doordat hij niet over diskrete waarden van x (=1,2,3,...) maar over een kontinu domein van x ($x \in \mathbb{R}$) gedefinieerd is. Dat wil zeggen, dat de funktie uitspraken kan doen over oneindig kleine verschillen tussen tijdsintervallen. Om ervoor te zorgen dat de totale oppervlakte onder de kurve, die deze funktie beschrijft, 1 is, moet hij altijd met een getal vermenigvuldigd worden dat 'aangepast' wordt aan elke individuele toepassing van de formule. Dit getal 'differentieert' over alle waarden die de formule genereert. De volledige formule voor de (kans-)verdeling luidt daarom:

$$\text{(c)} \qquad Px = me^{-mx}dx$$

Formule (c) beschrijft een Poissonverdeling van tijdsintervallen over in principe een oneindige tijd. Aangezien we voor ons doel met maar 28 intervallen (tussen 29 glissandi) te maken hebben, en met een muziek-notatiesysteem werken dat globaal van een eenheidsinterval uitgaat (vgl voetnoot 23), richten we de formule in op de volgende gegevens:

1) m = 4.5 gliss per maat;

2) we kiezen als eenheids-tijdsinterval 1/10 maat en drukken de intervallen x dus uit in eenheden van 0.10; (
is strikt genomen de onderverdeling in 10 per maat, maar Xenakis maakt in de praktijk gebruik van triolen, kwartolen en kwintolen en *benadert* daarmee de resultaten van de verdelingsformule);

3) we hebben 28 intervallen in totaal nodig.

In afb 47 staat de tabel met alle calculaties van links naar rechts.

x	mx	e^{-mx}	me^{-mx}	$me^{-mx}dx$	$28Px$
0.00	0.00	1.000	4.500	0.362	10
0.10	0.45	0.638	2.870	0.231	7
0.20	0.90	0.407	1.830	0.148	4
0.30	1.35	0.259	1.165	0.094	3
0.40	1.80	0.165	0.743	0.060	2
0.50	2.25	0.105	0.473	0.038	1
0.60	2.70	0.067	0.302	0.024	1
0.70	3.15	0.043	0.194	0.016	0
			12.077	0.973	28
			(12.415)*		

*door Xenakis gevonden som is onjuist. Berekening op basis hiervan echter toch doorgezet. (Vermoedelijk optelling van nog meer probabiliteiten die in $28Px$ toch 0 werden).

afb. 47

In de kolom x staan de tijdsintervallen uitgedrukt in tienden van een maat. Het kleinste tijdsinterval is 0, het daaropvolgende 1/10 maat, 2/10 etc. Aangezien in de Poissonprocessen samenvallende gebeurtenissen 'verwaarloosbaar' zijn (zie 3.2.2 punt ii) besluit Xenakis intervallen tussen 0 en 1/10 maat toe te laten. Hoe hij dat in de praktijk van het notenschrift oplost is gemakkelijk te zien in afb 48. Daarom gelden ook alle overige x als globale orientaties. Vandaar dat in de tabel onder deze afbeelding in millimeter-*klassen* van 3 mm is gerekend. Daarachter staan de nummers van de intervallen uit de lijn onder het notenschrift. We komen zó terug op deze tabel. Afb 47 geeft de uitkomsten van mxx. Deze uitkomsten zijn immers de respektieve exponenten van e, zoals in de volgende kolom te zien is. Er bestaan tabellen voor e^x waaruit men de uitkomsten kan aflezen. Met moderne zak-rekenmachientjes kunnen ze ook uitgerekend worden. NB. merk op dat

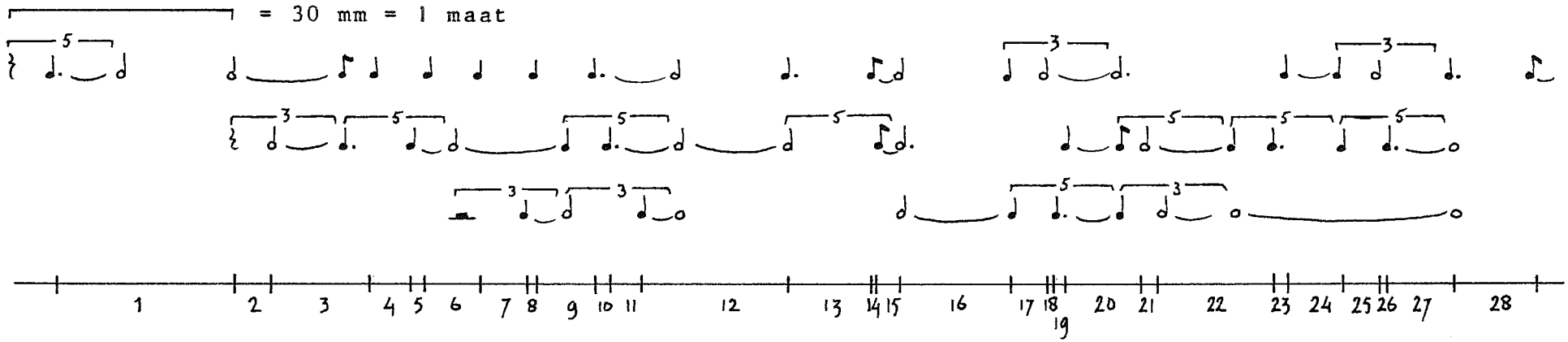
$$e^{-mx} = \frac{1}{e^{mx}}$$

en $\quad e^0 = 1.$ (zie ook Appendix I)

In de volgende kolom wordt tenslotte elke uitkomst uit de vorige nog met m vermenigvuldigd. Nu moet alleen dx nog berekend worden. We weten dat de som van alle 'kansen' (percentages) 1 moet zijn. (i.e. de oppervlakte onder de kurve in de grafiek is in totaal 100 % = 1). We weten ook dat dx daarvoor de uiteindelijke verantwoordelijkheid draagt. Welnu, als we alle uitkomsten in de vierde kolom optellen, komen we op een totaal van 12,415. (Xenakis' uitkomst). Als we maw. alle percentages met $\frac{1}{12.415}$ vermenigvuldigen, moet deze som automaties 1 worden.

Daarom: $$dx = \frac{1}{12.415} \doteq 0.0805$$

Alle percentages worden nu met dx vermenigvuldigd en staan in de vijfde kolom. Opgeteld levert dit ongeveer 1 op; niet precies 1 omdat er wat afrondingen achter de komma hebben plaats gevonden. Aangezien dit de definitieve percentages zijn, maar niet de definitieve aantallen, moeten we elk percentage nog met 28 vermenigvuldigen, zijnde het *aantal* intervallen dat we nodig hebben. Deze staan tenslotte in de laatste kolom.



x in mm	intervalnummers behorend in x-klasse	Aantal
0 = 0-3 mm	5 8 10 14 15 18 19 21 23 26	10
0.1 = 3-6 mm	2 4 11 17 25 7	6
0.2 = 6-9 mm	6 9 24(27)	4
0.3 = 9-12 mm	13 20 28	3
0.4 = 12-15 mm	3 16	2
0.5 = 15-18 mm	22	1
0.6 = 18-21 mm	12	1
0.7 = 21-? mm	1	1

Ritmies schema van cel (17,III) met daaronder de tijdsintervallen op een tijdslijn uitgezet. Alle intervallen genummerd van 1 tot 28. In bijgaande tabel de intervallen bijeengebracht die een bepaalde lengte x bezitten. 1/10 maat = 3 mm is de maateenheid, zoals in 3.3.1 punt 2) vermeld staat. Merk op, dat we een goede indruk van de verdeling krijgen als we de tabel op z'n kant leggen, met x als basis.

afb. 48

We zien nu dat in de tabel van afb 48 een kleine afwijking te zien is ten opzichte van de eindkolom in afb 47, t.w. 6 intervallen in plaats van 7 bij x=0.1, en 1 interval bij x=0.7. Deze afwijking is waarschijnlijk een gevolg van een lichtelijk andere interpretatie van de interval grenzen bij Xenakis. Voor het overige voegt de verdeling zich goed naar het mathematiese model.

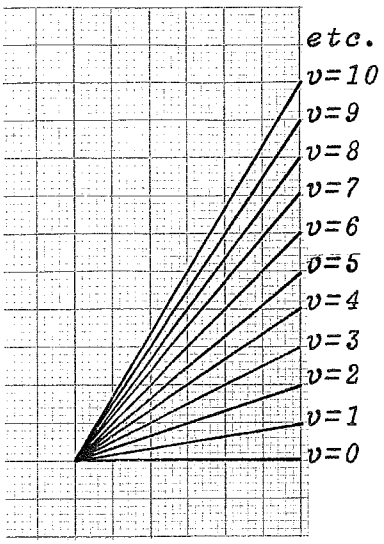
3.3.3. De snelheid van een glissando wordt uitgedrukt in een getal v, dat de verhouding

$$v = \frac{\textit{afgelegde afstand}}{\textit{hoeveelheid tijd}} = \frac{df}{dt}$$

aangeeft. (Vgl 1.1.3, met name NB 1.) Vóór we nog van enige verdeling uitgaan kunnen we vast een inventaris maken van de snelheden die we zullen gaan gebruiken. Daarna bepaalt een gekozen verdeling hoeveel van elke snelheid een bepaalde cel zullen bevolken. Eén van de beperkende faktoren bij de samenstelling van zo'n inventaris is het notenschrift (dat voor Achorripsis het traditionele systeem is), met de bijbehorende beperking die Xenakis zichzelf opgelegd heeft om geen kleinere ritmiese waarden te gebruiken dan de achsten-triool (♪♪♪ 3) bij ♩=52. Een andere beperking is het totaal aantal dat we nodig hebben: als we onze inventaris te groot maken (bv zo groot als het totaal benodigde) valt er weinig meer te 'verdelen' en wordt de opgave gereduceerd tot 'uitdelen' = random uitzetten over de tijd. De inventaris *is* in dat geval de verdeling. Xenakis kiest voor een aantal basissnelheden, uitgedrukt in

$$\frac{\textit{aantal kleine sekundes}}{\textit{per maat}}$$

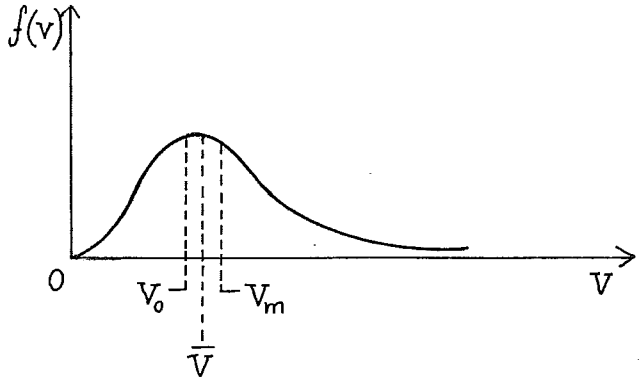
In een grafiekje kunnen we een dergelijke voorraad als volgt weergeven: we kiezen bv 3 cm is 1 maat op de abcissa; 0.5 cm is 1 kleine sekunde op de vertikale as. De lijnen die we vervolgens trekken hebben de volgende snelheden: 0,1,2,... kleine sekundes per maat en de *'schuinte'* van de lijn geeft dit op de tekening aan, dwz als we één van die glissandi straks nodig hebben, kunnen we, *onafhankelijk van zijn lengte*, zijn snelheid vanuit deze inventaris transporteren met behulp van zijn bijbehorende 'schuinte' (zie afb 49). De glissandi omhoog hebben positieve, de glissandi omlaag negatieve waarden.



afb. 49

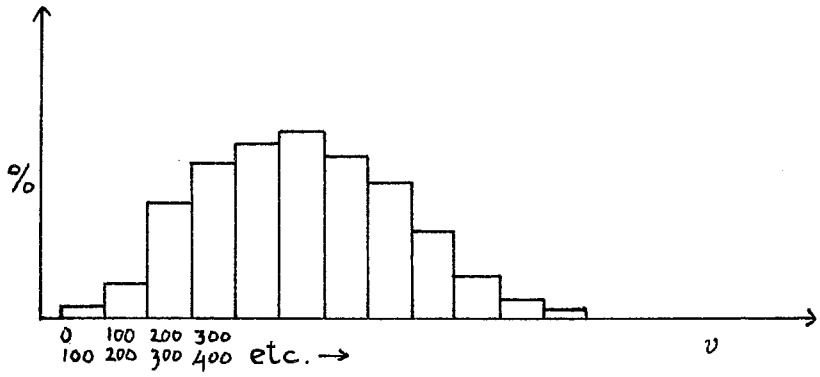
3.3.4. Voor de verdeling van de glissandosnelheden is Xenakis uitgegaan van een redeneervorm, die al dateert uit de vorige eeuw (Maxwell en Boltzmann) en die o.a. een statistiese beschrijving levert van de snelheden van moleculen in een gas in een 'afgesloten' ruimte. Die afgeslotenheid is van belang bij de premisse dat de beschrijving geldt voor een situatie waarbij geen energieverlies naar buiten optreedt en die dus enige tijd voortduurt. (Een zgn 'ideaal' gas). Zomin als we over statistiese beschrijvingswijzen en waarschijnlijkheidsrekening[24)] enige volledigheid kunnen nastreven in dit boek, kunnen we erg diep ingaan op deze theorie. Voor een heldere en elementaire beschrijving verwijs ik naar YOUNG 1964, hfdst 16. Aangezien Xenakis voor enige verwarring heeft gezorgd door de zgn Maxwell-Boltzmannverdeling in één adem te noemen met de Normale verdeling, die ook Gaussiese wordt genoemd naar de Duitse mathematikus, astronoom en fysikus Gauss (1777-1855) moeten we er toch enige minimale aandacht aan schenken. We doen dit door eerst het probleem van de snelheden van moleculen in een gas te bekijken, omdat een aantal konsepten daaruit parameters vormen in de verdelingsfunktie van de Normale verdeling.

Als de ruimte goed afgesloten is (zodat geen moleculen kunnen ontsnappen) en van buitenaf wordt *de temperatuur binnenin konstant* gehouden, dan houden de moleculen een *konstante gemiddelde snelheid*, waarmee ze tegen elkaar en tegen de buitenwanden botsen, welke laatste kracht in termen van 'druk' gemeten wordt. Er bestaan technieken om die snelheden te meten. Als van een voldoende groot aantal een tabel aangelegd wordt, blijkt voortdurend weer een zelfde soort verdeling te ontstaan, die op de volgende wijze in een grafiek is weer te geven (zie afb 50)



afb. 50

Hierin staan de snelheden op de abcissa, en hun frekwentie $f(v)$ op de ordinaat, uitgedrukt in een kurve die globaal over alle frekwenties van de afzonderlijke snelheden heen getrokken is. We moeten goed begrijpen dat hier een kontinue verdeling gemaakt is uit een tabel waar alleen diskrete (diskontinue) waarden vermeld zijn. Omdat de kontinue kurve (met $v \in \mathbb{R}$ dus!) suggereert dat voor elke willekeurige v en frekwentie $f(v)$ bestaat, is hij een idealisering van de premisse dat het eigenlijk om een ontelbaar oneindig aantal snelheden gaat van evenzovele moleculen. In de werkelijkheid meten we de snelheden in klassen met een bepaalde ondergrens en bovengrens, en turven elke geobserveerde snelheid af in de klasse waarbinnen hij valt. In afb 51 staat zo'n diskrete verdelingsgrafiek (een zgn histogram), waarin klassen aangebracht zijn (op de abcissa) van 0-100 m/sec, van 100-200 m/sec, van 200-300 etc. Als dus een snelheid van 483 m/sec gemeten werd, werd hij afgeturfd in de klasse (kolom) van 400-500 m/sec.



afb. 51

In dit histogram is de klasse van 500-600 m/sec het sterkst vertegenwoordigd. In andere woorden: de snelheden tussen 500 en 600 m/sec zijn (bij een bepaalde temperatuur en dichtheid) het meest waarschijnlijk.

De Maxwell-Boltzmann verdeling nu heeft een paar karakteristieke eigenschappen, die meer aan het licht komen, naarmate we de snelheidsklassen wat kleiner maken (er dus meer en smallere kolommen op het histogram verschijnen) tot we op een gegeven ogenblik de doorlopende kurve uit afb 50 kunnen tekenen:

1) De kurve blijkt beschreven te kunnen worden met de mathematiese funktie

$$f(v) = av^2 e^{-v^2/b^2}$$

waarin a een konstante is, nodig om de totale oppervlakte eronder 1 te laten zijn (frekwentie uitgedrukt in percentages!). In de M-B verdeling is die konstante als volgt in de formule verwerkt:

$$f(v) = \frac{4v^2}{b^3\sqrt{\pi}} e^{-v^2/b^2}$$

dus $a = \dfrac{4}{b^3\sqrt{\pi}}$

En b is een konstante die in de praktijk dezelfde waarde blijkt te bezitten als de zojuist genoemde meest waarschijnlijke snelheid v_0, dus $b=v_0$

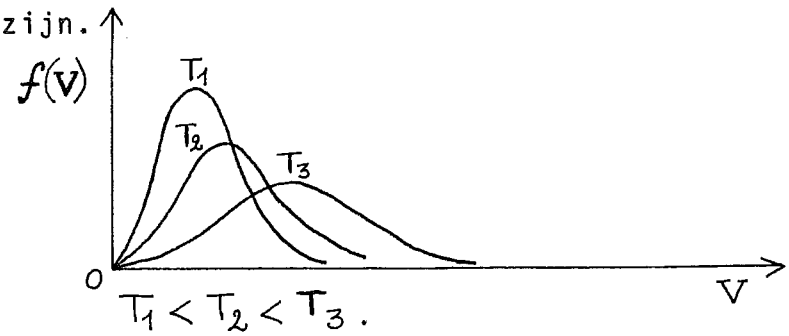
2) b is bovendien recht-evenredig met de temperatuur van het gas en de molecuul-massa ervan.

3) v_o blijkt altijd iets links van de gemiddelde snelheid $\bar{v}$ te liggen, en deze weer iets links van het zgn kwadraties gemiddelde v_m.[25] Hun onderlinge relaties zijn ongeveer als volgt:

$$\bar{v} \triangleq 1.13 v_o$$

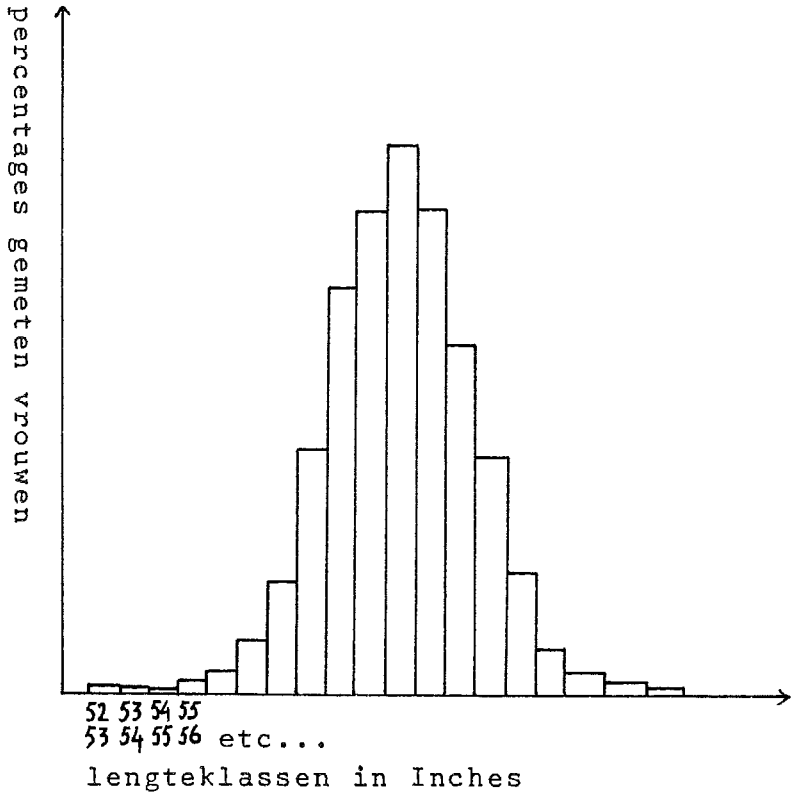
en $$v_m \triangleq 1.22 v_o$$

4) Als de temperatuur stijgt blijft de verdeling dezelfde maar wordt de spreiding groter, ook omdat b immers groter wordt. Het is goed te zien in afb 52, waar 3 kurves met 3 temperaturen van één gas te zien zijn.



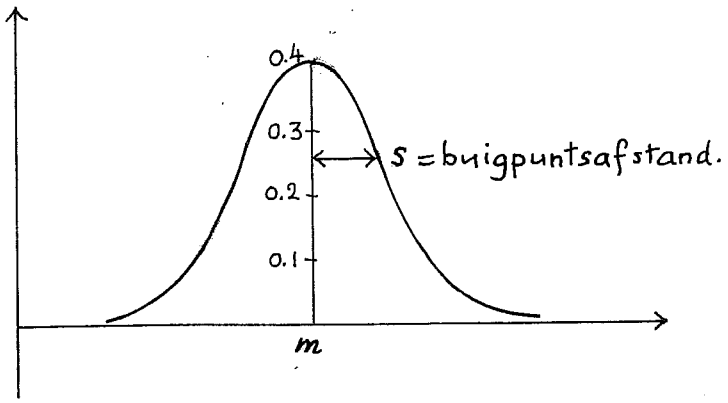
afb. 52

3.3.5. Als we inzicht willen hebben in hoe de lichaamslengten van vrouwen verdeeld zijn, meten we bij een groot aantal van hen hun lengte, noteren die in een tabel en tekenen daar weer een grafiek van. Bij al dit soort onderzoeken blijkt dan telkens weer een stereotype verdeling uit de bus te rollen, die de Normale of Gaussiese verdeling wordt genoemd. In afb 53 staat een voorbeeld van zo'n onderzoek: op de abcissa de lengteklassen, op de ordinaat hun percentages.



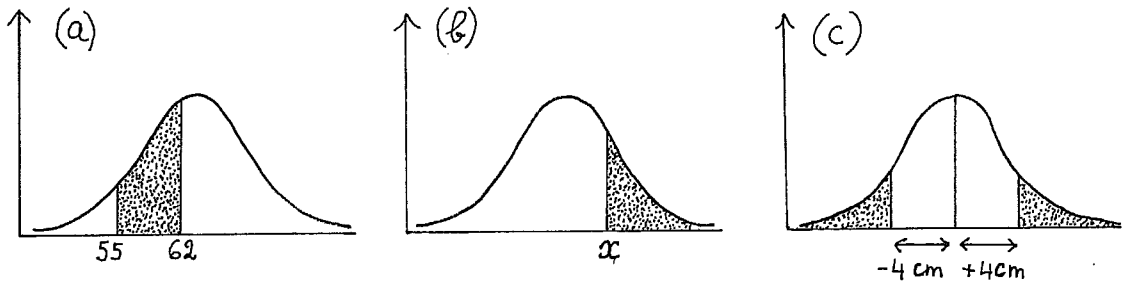
afb. 53

Naarmate we een groter aantal observaties (metingen) doen per onderzochte groep[26)] blijkt de grafiek al symmetrieser te worden, tot hij geidealiseerd kan worden in een doorlopende kurve, die de situatie voor een oneindig aantal lengtes weergeeft Afb 54).



afb. 54

De totale oppervlakte onder de kurve, en ook die van het histogram, is natuurlijk weer 1, evenals in de grafieken van 3.3.4. Een speciale mathematiese rekenmethode (integratie) maakt het mogelijk om alle mogelijke oppervlaktes onder die kurve uit te rekenen en derhalve om uitspraken te doen als:
"Het percentage vrouwen met een lengte tussen 55 en 62 inches is zoveel"; (a)
"de kans dat een vis (van een bepaalde vissoort) een gewicht heeft groter dan x gram is zo en zoveel"; (b)
"het percentage aardappelen dat meer dan 4 cm afwijkt in omvang van de gemiddelde omvang van een partij aardappelen, is zo en zoveel". (c)
(Vgl afb 55)



afb. 55

De karakteristieke eigenschappen kunnen nu vergeleken worden met die van de Maxwell-Boltzmann verdeling:
1) De mathematiese funktiebeschrijving voor de kurve van de Normale verdeling luidt

$$f(x) = ae^{-\frac{1}{2}(x-m)^2/s^2} \qquad (1)$$

waarin $a = \dfrac{1}{s\sqrt{2\pi}}$

en s de standaardafwijking. Deze wordt berekend uit de zgn variantie, gedefinieerd als het gemiddelde van de kwadraten van alle afwijkingen:

$$\mathrm{Var}(x) = s^2 = \frac{\sum(x-m)^2}{N}$$

en $s = \sqrt{s^2}$

waarin N het totale aantal geobserveerde (gemeten) x is.
m is weer het gemiddelde.
2) De standaardafwijking bij de Normale verdeling is gelijk aan

de afstand van het buigpunt van de kurve (waar deze overgaat van bol naar hol) tot het midden van de verdeling (zie afb 54). Zoals het woord al zegt, wordt de standaardafwijking als een standaardmaat gebruikt om uitspraken over de verdeling mee te doen. In het geval van de Normale verdeling vindt deze vooral toepassing in de uitdrukking

$$z = \frac{x-m}{s} \qquad (2)$$

die een standaardmaat voor de beoordeling van afwijkingen van het gemiddelde is. We zien dat z^2 in de exponent van e in (1) voorkomt. De formule wordt daarom meestal vereenvoudigd tot zijn zgn standaardvorm

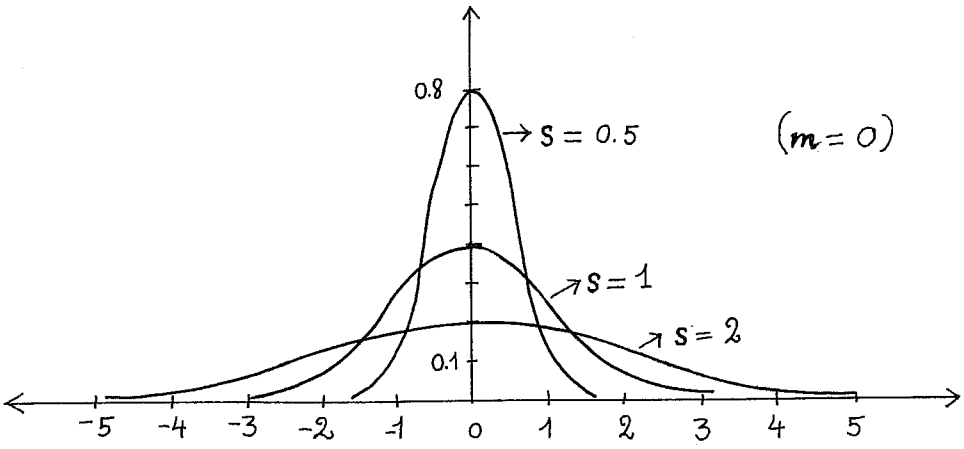
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (3)$$

Er bestaat nu een rechtstreeks verband tussen (2) en (3), en een van de gevolgen daarvan is dat z eveneens een Normale verdeling heeft (zie afb 57). Vanwege de eigenschap dat z bovendien deze verdeling *altijd rondom de nul* heeft, en de onderzoekingen meestal gaan over verschijnselen die rondom een ánder gemiddelde dan nul gespreid liggen (cf de drie voorbeelden hierboven) worden berekeningen meestal uitsluitend via (2) gedaan, omdat voor deze verdeling gemakkelijk tabellen kunnen worden samengesteld: is het gemiddelde en de standaardafwijking *(m* en *s)* van een verzameling (populatie) eenmaal bekend, dan kunnen we voor elke x in zo'n tabel nagaan hoe groot de kans is dat (hoe groot het percentage moet zijn van) z = een of andere uitkomst. Deze kans, dit percentage uit de tabel, korrespondeert dan eksakt met het oppervlak uit de oorspronkelijke verdeling (vgl afb 55). We komen op de toepassing ervan zo dadelijk terug.

3) Het gemiddelde $\bar{x}=m$ valt in de grafiek geheel samen met het kwadraties gemiddelde x_m én met de x_o die de hoogste frekwentie heeft. Daarom

$$m = x_o = x_m$$

4) Als de afwijkingen van het gemiddelde toenemen, dus als s groter wordt, wordt de spreiding natuurlijk ook groter (wijder). Dat is weer goed te zien in afb 56, waar 3 verschillende standaardafwijkingen op de verdelingen aangebracht zijn. In deze afbeelding is gemakkelijk het verband af te lezen tussen de standaardafwijking en de hoogte van de top van de kurve (omgekeerd evenredig).



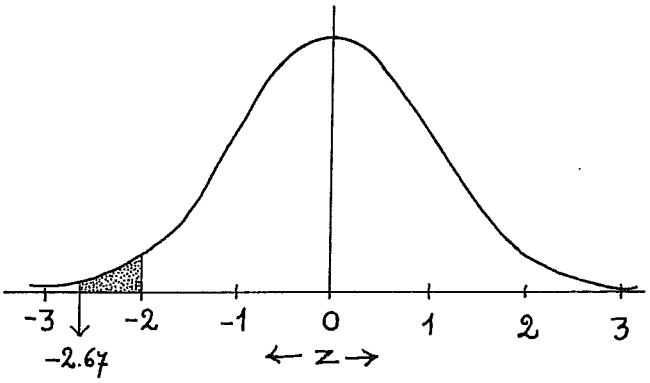
afb. 56

3.3.6. Als we nu als uitgangspunt voor de oplossing van het glissandoprobleem beginnen met de Normale verdeling, dan kunnen we ons de volgende wijzen van aanpak voorstellen. Daarvoor nemen we afb 49 als basisinventaris.

i. Stel we willen een glissandoveld maken met gemiddelde snelheid $\bar{v} = m = 4$ (kleine sekundes per maat).
We weten dat snelheden omhoog gelijk zijn aan snelheden omlaag. We kunnen ons daarom bepalen tot de 'absolute' waarden van de snelheden (met $m = |4|$) en later de uitkomsten bv fifty-fifty over omhoog en omlaag verdelen. Uit de Normale verdeling weten we nu dat de overige snelheden zich symmetries rondom dit gemiddelde zullen groeperen. Voor deze spreiding dienen we echter ook een keuze te doen uit mogelijke standaardafwijkingen. Stel $s = 1.5$. We kunnen nu, voor alle snelheidsklassen, de frekwentie in percentages met behulp van een tabel voor z, de standaardmaat, uitzoeken. Aangezien we diskrete waarden nodig hebben voor de snelheden, berekenen we de percentages van de oppervlakken voor $v = 0$ tot 1
$v = 1$ tot 2 etc.
Bovendien zullen we uiteindelijk in het notenschrift toch altijd een benadering moeten geven. Maar deze fluktuaties passen uitstekend in het idee van snelheids*klassen*. De uiteindelijk te gebruiken snelheden kunnen we daarom gemakshalve als gemiddelde snelheden per snelheidsklasse noteren ($\bar{v}_i$), (de middens van elke klasse). Bv de frekwentie van snelheid $v_o = 0$ berekenen we als volgt:

$$z_o = \frac{v_o - m}{s} = \frac{0 - 4}{1.5} = -2,67$$

De tabel geeft nu aan dat de kans dat z = -2.67 optreedt, (afgerond) 0.01 is. In afb 57 zien we dat deze uitkomst korrespondeert met de oppervlakte onder de kurve links van z = -2.67, omdat de tabel alleen percentages geeft voor *alle* waarden kleiner dan de gevonden z.



afb. 57

Voor snelheid v=1

$$z_1 = \frac{1 - 4}{1.5} = -2$$

Deze waarde korrespondeert in de tabel met frekwentiepercentage 0.02, dat is de oppervlakte onder de kurve links van z = -2. (NB. ook voorbij z = -2.67)
Onze snelheidsklasse v = 0 tot 1 bestaat dus uit de oppervlakte tussen de twee bovengrenzen van de gevonden z-waarden. In termen van verdelingsfunkties:

$$P(\bar{v}_1) = F(z_1) - F(z_o) = F(-2) - F(-2.67) = 0.02 - 0.01 = 0.01.$$

Dat is in de afbeelding het gearceerde gebied onder de 'klok', zijnde 1% of $\frac{1}{100}$ gedeelte van de totale oppervlakte onder de klok. In afb 58 staan verder de berekeningen van de overige snelheidsklassen. Aangezien we in totaal 29 glissandosnelheden nodig hebben, moeten de percentages met 29 vermenigvuldigd worden.

NB. Als we met kleine hoeveelheden werken en zoveel achter de komma afronden onder F(z), moeten we vaak een kleine korrektie aanbrengen om aan de gewenste hoeveelheid te komen. We zien al dat ten gevolge van die afrondingen het totale percentage op 0.98 in plaats van 1.00 is uitgekomen. De korrektie in ons geval

is aangebracht in de eerste snelheidsklasse ($\bar{v}_0$=0.5) waar 0 tot 1 is gemaakt, en evenzo in de laatste. We hadden de korrektie ook elders kunnen maken en (zoals in de werkelijkheid altijd het geval is) de verdeling iets minder netjes (i.e. minder symmetries) maken.[27] Bv zo:

29 P(v)	0	- 2	- 5	- 8	- 7	- 5	- 2	- 1
$\bar{v}_i$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5

($\bar{v}_i$) = klassemiddens.

	F(z)	P(v)	29P(v)	$\bar{v}_i$	
z_0 = -2.67	0.01	0.01	1 (0)	0.5	
z_1 = -2.00	0.02	0.07	2	1.5	
z_2 = -1.33	0.09	0.16	5	2.5	
z_3 = -0.67	0.25	0.25	7	3.5	
z_4 = 0.00	0.50	0.25	7	4.5	(a)
z_5 = 0.67	0.75	0.16	5	5.5	
z_6 = 1.33	0.91	0.07	2	6.5	
z_7 = 2.00	0.98	0.01	1 (0)	7.5	
z_8 = 2.67	0.99				
		0.98	29		

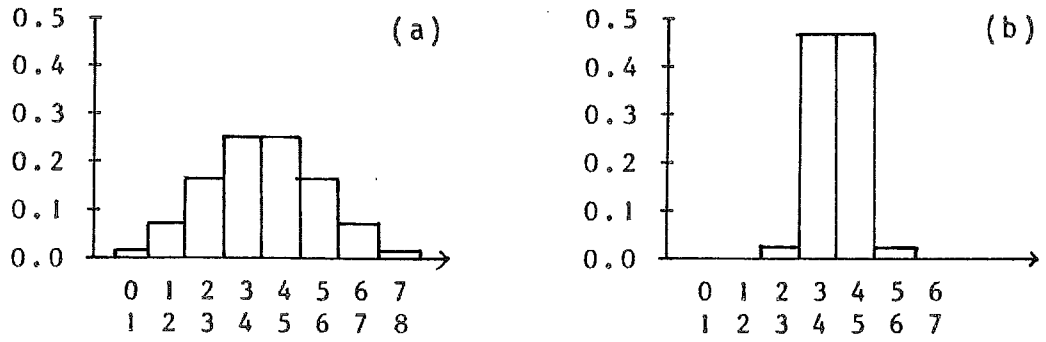
afb. 58

Om te demonstreren wat de standaardafwijking ertoe doet, geven we in afb 59 nog een tabel met m=4, maar nu met s=0.5.

	F(z)	P(v)	29P(v)	$\bar{v}_i$	
z_0 = -8	0.0000..	0.0000..	0	0.5	
z_1 = -6	0.0000..	0.00003	0	1.5	
z_2 = -4	0.000003	0.02272	1	2.5	
z_3 = -2	0.02275	0.47725	14	3.5	
z_4 = 0	0.50000	0.47725	13 (14)	4.5	(b)
z_5 = 2	0.97725	0.02272	1	5.5	
z_6 = 4	0.99997	0.00003	0	6.5	
z_7 = 6	0.9999..	0.0000..	0	7.5	
z_8 = 8	1.0000				
		0.99980	29		

afb. 59

Zoals te verwachten komen de snelheidsklassen, die wat verder van m=4 afliggen, vrijwel niet meer aan bod. De verdelingen van beide tabellen zijn nog een keer in beeld gebracht in afb 60.



afb. 60

NB. 1) Natuurlijk kunnen we de onderverdelingen van de snelheidsklassen in geval (b) wat kleiner maken (d.i. het aantal klassen = kolommen in het histogram vergroten) zodat er nog een aantal trappen van de laagste naar de hoogste frekwentie toe leiden, die de verdeling wat vloeiender maken. In de praktijk van de glissandosnelheden betekent dit, dat we bv uitgaan van eenheden van ½ kleine sekunde per maat (stijgen of dalen). Voor z moeten we dan tussenliggende waarden berekenen etc.

NB. 2) De ontstane inventaris kan nu in twee helften worden opgedeeld, als we er vanuit gaan dat ons glissandoveld geen voorkeur mag vertonen voor de richting omhoog of omlaag. Per klasse delen we daarom de verkregen aantallen zodanig in positieve of negatieve aantallen, dat de totale voorraad ongeveer fifty-fifty is. Daarna kunnen ze random over het ontworpen ritme worden gedistribueerd.

ii. Een tweede mogelijkheid bestaat daarin, dat we de snelheid $v=0$ expliciet inlassen als onderdeel van de totale inventaris met daaromheen de grotere (negatieve én positieve) snelheden gegroepeerd (gespreid). In dat geval is $m=0$ en we kunnen de spreiding weer zo groot en zo klein maken als we willen. We zullen gemakkelijk kunnen inzien, dat de twee voorgaande tabellen in dat geval met een kleine ingreep opnieuw gebruikt kunnen worden. Immers de berekening van z wordt niet beinvloedt door m, maar uitsluitend door s. De enige ingreep in de tabel vindt plaats in de benaming van de snelheidsklassen $\bar{v}_i$. Als $m=0$ zullen de negatieve waarden immers gewoon links van m, en de positieve rechts liggen. De $\bar{v}_i$-klassen zullen in beide tabellen de volgende reeks vormen met bijbehorende frekwenties (afb 61)

$\bar{v}_i$	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5 . . .
(a)	1	2	5	7	7	5	2	1
(b)			1	14	13	1		

afb 61

De gemiddelde *absolute* snelheid is nu natuurlijk veel lager dan in de oorspronkelijke tabellen het geval was. Deze absolute snelheid $|m|$ wordt berekend door de som van elke absolute snel-

heid te delen door hun totaal aantal:

$$|m|_a = \frac{(1x3.5) + (2x2.5) + \ldots + (5x1.5) + (2x2.5) + (1x3.5)}{29} =$$

$$= \frac{39}{29} \doteq 1.34$$ [28)]

We kunnen vanuit dit konsept de gemiddelde snelheid alleen opvoeren door s groter te maken, waardoor de spreiding rondom $m=0$ groter (wijder) wordt. Dat bewijst bovenstaand voorbeeld al, want terwijl $|m|_a \doteq 1.34$ met $s = 1.5$

$|m|_b \doteq 0.57$ met $s = 0.5$

3.3.7. We hebben gezien dat de Maxwell-Boltzmann verdeling voornamelijk verschilt van de Gauss verdeling doordat hij niet symmetries is. Dat komt natuurlijk doordat aan de linkerkant ervan een absolute nul-grens staat (voor moleculen met snelheid nul) en de rechterkant geen grens heeft. De Gauss verdeling echter heeft aan beide kanten geen grenzen, (ook al hebben verschijnselen die ermee gemeten worden die wel...).

De verwarring die Xenakis nu veroorzaakt is, dat hij de door hemzelf gebruikte verdeling in verband brengt met de gastheorie van Maxwell-Boltzmann. Bovendien heeft Xenakis een redeneervorm uit een werk van Paul Lévy (vanuit die gastheorie) op een nogal kryptiese manier omgewerkt tot een voor de glissandi bruikbare vorm (cf FM p. 13-15) zodat het moeilijk is precies te achterhalen hoe het rekenmechanisme in elkaar heeft gezeten. Voeg daaraan toe, dat de tabel in Formalized Music (FM p. 35) een paar rekenfouten bevat, de door Xenakis gehanteerde formule niet zo gemakkelijk in tabellen bij de hand is, en last but not least een transcriptie van de glissandi uit de partituur (uitg. Bote & Bock) zeer moeilijk met de getallen van de tabel in preciese overeenstemming te brengen is, dan kan men zich als argeloze lezer gauw ontmoedigd voelen. We gaan het probleem daarom toewerken naar de betrekkelijk eenvoudige manier waarop de Gauss verdeling zich op het glissando-probleem laat toepassen.

Laten we voor alle duidelijkheid de frekwentie-funkties van resp. de Normale (Gauss), de Maxwell-Boltzmann, en de door Xenakis aan Lévy ontleende verdeling onder elkaar zetten (afb 62). De overeenkomstige termen zijn allemaal van dezelfde letters voorzien om verschillen c.q. overeenkomsten gemakkelijker te kunnen waarnemen.

GAUSS (1)	$f(v) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(v-m)^2/a^2}$	$\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$	$(z = \frac{v-m}{a})$
XEN/ LEVY (2)	$f(v) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}$	$\hat{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$	$(z = \frac{v}{a})$
MAXW/ BOLTZM (3)	$f(v) = \frac{v^2}{a^2} \cdot \frac{4}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}$	$\hat{=} \frac{4z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$	$(z = \frac{v}{a})$

afb, 62

Links staan de frekwentiefunkties in hun oorspronkelijke gedaante, rechts de reduktie tot hun standaardvormen. Twee belangrijke opmerkingen zijn hier van kracht:

i. Alleen in (3) is de stochastiese variabele v in de coefficient van de exponentiele funktie opgenomen (dwz in de uitdrukking links van de e), zodat hij niet konstant is, maar toeneemt naarmate v groter wordt. (z in de standaardvorm). Als $v=0$, krijgen de funkties de volgende waarden:

(1) $f(v) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}$ dan en slechts dan als $m=0$

$f(v) = ?$ afhankelijk van $m \neq 0$

(2) $f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}}$

(3) $f(v) = 0$

Maw. de Maxwell-Boltzmann funktie (verdeling) zegt dat een molecuul in een gas niet snelheid 0 kan hebben: 'de frekwentie van moleculen met $v=0$ is gelijk nul'. De beide andere funkties kunnen niet nul worden, maar naderen nul in (1) naarmate v zich verder van m verwijdert (in beide richtingen!) en in (2) als $v \to \infty$.

ii. De toppen van de respektieve funkties liggen bij

(1) als $v=m$ (symmetries rondom m)

(2) $v=0$ (symmetries rondom 0)

(3) $v=a$ (*niet* symmetries rondom a, maar scheef naar rechts)

(of als z=1 in de standaardvorm).

Konklusie: de Xenakis/Lévy-verdeling is een Normale verdeling maar met een marginale afwijking in de coefficient en de exponent: de 2 in de teller van de coefficient en het ontbreken van

$\frac{1}{2}$ in de exponent staan met elkaar in verband. Wij zullen het hier zo dadelijk over hebben. De overeenkomst die tussen beide verdelingen in het oog springt, is dat de v-funktie van Xenakis/ Lévy en de z-funktie van de Normale verdeling symmetries rondom de nul zijn.
We gaan eerst kijken naar de resultaten van Xenakis. Daarna proberen we met de z-funktie van de Normale verdeling deze resultaten zo dicht mogelijk te benaderen, zodat we kunnen profiteren van het feit dat hiervoor gemakkelijker tabellen beschikbaar zijn. We zullen zien, dat we daarmee, als vervolg op de resultaten van 3.3.6, nog een derde variant op deze verdeling kunnen gebruiken. De tabel van Xenakis' verdeling van de glissando-snelheden staat, aangepast aande in onze studie gebruikte terminologie, in afb 63.

v	$z=\frac{v}{a}$	F(z)	P(v)	29P(v)	$\bar{v}_i$
0	0.000	0.0000	0.2869	9 (8)	0.5
1	0.258	0.2869	0.2510	7	1.5
2	0.516*	0.5379	0.1859	5	2.5
3	0.773	0.7238	0.1310	4	3.5
4	1.031*	0.8548	0.0771	2	4.5
5	1.228#	0.9319	0.0397	1	5.5
6	1.545*	0.9716	0.0179	1	6.5
7	1.805*	0.9895	(0.0071)	0	7.5
			0.9966	29	

NB. de getallen met * gemerkt zijn door Xenakis naar beneden afgerond. Het getal gemerkt met # is waarschijnlijk een drukfout: 1.228 moet zijn 1.288.

afb. 63

Hierin is Xenakis uitgegaan van een andere maat voor de spreiding dan de standaardafwijking, namelijk het zgn kwadraties gemiddelde van de snelheden, door hem vastgesteld op a=3.88, en in navolging van de terminologie in de theorie van de gassen, door Xenakis genoemd de *'temperatuur'* van het glissando-veld. Zoals in die theorie, is deze temperatuur recht evenredig met de totale dichtheid van het veld (de afgesloten ruimte van het 'ideale' gas, cf 3.3.4). We herinneren ons nog, dat zich in dat veld de op één na laagste dichtheidsklasse bevindt (zie cel 17,III in de hoofdmatrix van Achorripsis). Het ligt daarom voor de hand dat Xenakis voor a in de cellen met hogere dichtheid een grotere waarde heeft gekozen. Dit is in de partituur gemakkelijk

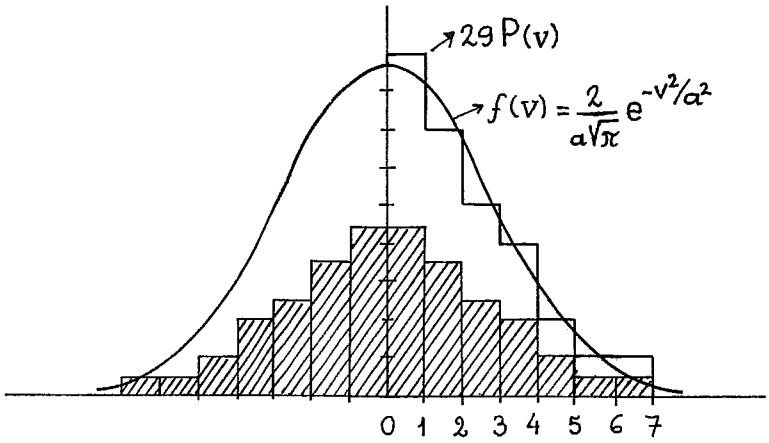
na te checken. (Vgl cel 10,III - in de partituur maat 57-64; cel 13,III - maat 77-84)

We zien dat Xenakis in de einduitkomsten opnieuw een korrektie heeft aangebracht om op een totaal van 29 te kunnen komen. Als we er vanuit gaan dat de snelheden fifty-fifty omhoog/omlaag gaan, kunnen we een symmetriese grafiek van de verdeling maken door alle eindfrekwenties door 2 te delen en een spreiding rondom nul te maken. In afb 64 zien we deze verdeling afgebeeld. Als we bedenken dat Xenakis' formule alleen positieve (= absolute) waarden genereert, kunnen we ons voorstellen dat dit in de grafiek tot uitdrukking komt door de linkerhelft van de verdeling 'om te klappen' naar rechts, en de waarden van de negatieve snelheden op te tellen bij de positieve. Dan ontstaat de trapsgewijs dalende kurve boven de oorspronkelijke verdeling. Deze kan in feite verkregen worden door alle kolommen van de oorspronkelijke verdeling met 2 te vermenigvuldigen, omdat deze laatste immers symmetries is. Daarin zien we de rechtvaardiging van de 2 in de coefficient van Xenakis' frekwentiefunktie: deze heeft van meet af aan rekenschap gegeven van positieve én negatieve waarden, omdat integraties van de frekwentiefunktie alleen op de positieve helft werd toegepast. Als we die funktie namelijk in z'n geheel zouden tekenen en idealiseren voor een oneindige hoeveelheid glissando's met a=3.88, dan zou die er uitzien als de vloeiende kurve die er nog doorheen getekend is. Deze wordt beschreven door de funktie $f(v)$, zodat de berekening van alle mogelijke oppervlakten eronder (integratie) mogelijk is. (NB. vanzelfsprekend is de trapsgewijs dalende funktie de weergave van 29 P(v) uit de tabel).

Volgens Xenakis is de standaardafwijking van deze verdeling gelijk aan $a/\sqrt{2}$, dwz

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \doteq \frac{3.88}{1.414} = 2.74$$

We weten dat de z-funktie geheel afhankelijk is van de standaardafwijking. We kunnen dus bekijken of we op basis van deze standaardmaat én met de kennis die we nu van Xenakis' werkwijze hebben, zijn verdeling kunnen benaderen met deze z-verdeling. Die verdeling is immers eveneens symmetries rondom z=0 gespreid. Als we nu de linkerhelft ook een omklappen naar rechts (en dus eerst alleen absolute = positieve waarden berekenen, maar in



Afb. 64 Het gearceerde gebied is de verdeling van negatieve en positieve glissandi. De trapsgewijze kurve 29P(v) is het resultaat van het omklappen van de linkerhelft naar de rechterkant en optelling bij de kolommen van de gearceerde verdeling. De kurve stelt de geidealiseerde verdeling $f(v)$ voor, gerekonstrueerd aan de hand van P(v) in de tabel (van afb 63) waarvan door Xenakis alleen de rechterhelft is gebruikt.

tegenstelling met het gestelde in 3.3.6, toch met de nul-klasse als zwaartepunt = top van de verdeling, dus m=0), dan moeten we de waarden P(z) dus eenvoudig met 2 vermenigvuldigen. In afb 65 staan de resultaten, met in de laatste kolom ter vergelijking de uitkomsten van Xenakis. De lezer wordt verzocht beide tabellen ook op andere uitkomsten te vergelijken.

v	z	F(z)	P(v)	2P(v)	29x2P(v)	Xen.
0	0	0.5				
1	0.36	0.64058	0.14058	0.28116	8	9 (8)
2	0.73	0.7673	0.12672	0.25344	7	7
3	1.09	0.86214	0.09484	0.18968	6 (5)*	5
4	1.46	0.92785	0.06571	0.13142	4	4
5	1.82	0.96562	0.03777	0.07554	2	2
6	2.19	0.98574	0.02012	0.04024	1	1
7	2.55	0.99461	0.00887	0.01774	1	1
8	2.92	0.99825	0.00364	0.00728	0	0
					29	29

*29 x 0.18968 = 5.50072 zodat het bijna naar beneden afgerond kan worden en zodoende nog dichter bij Xenakis' uitkomst komt.

afb. 65

Let op: We hebben nu z uitgerekend door m=0 te stellen en alleen positieve waarden te nemen, maw.

$$z = \left|\frac{v-m}{s}\right| = \left|\frac{v-0}{s}\right| = \frac{v}{s}.$$

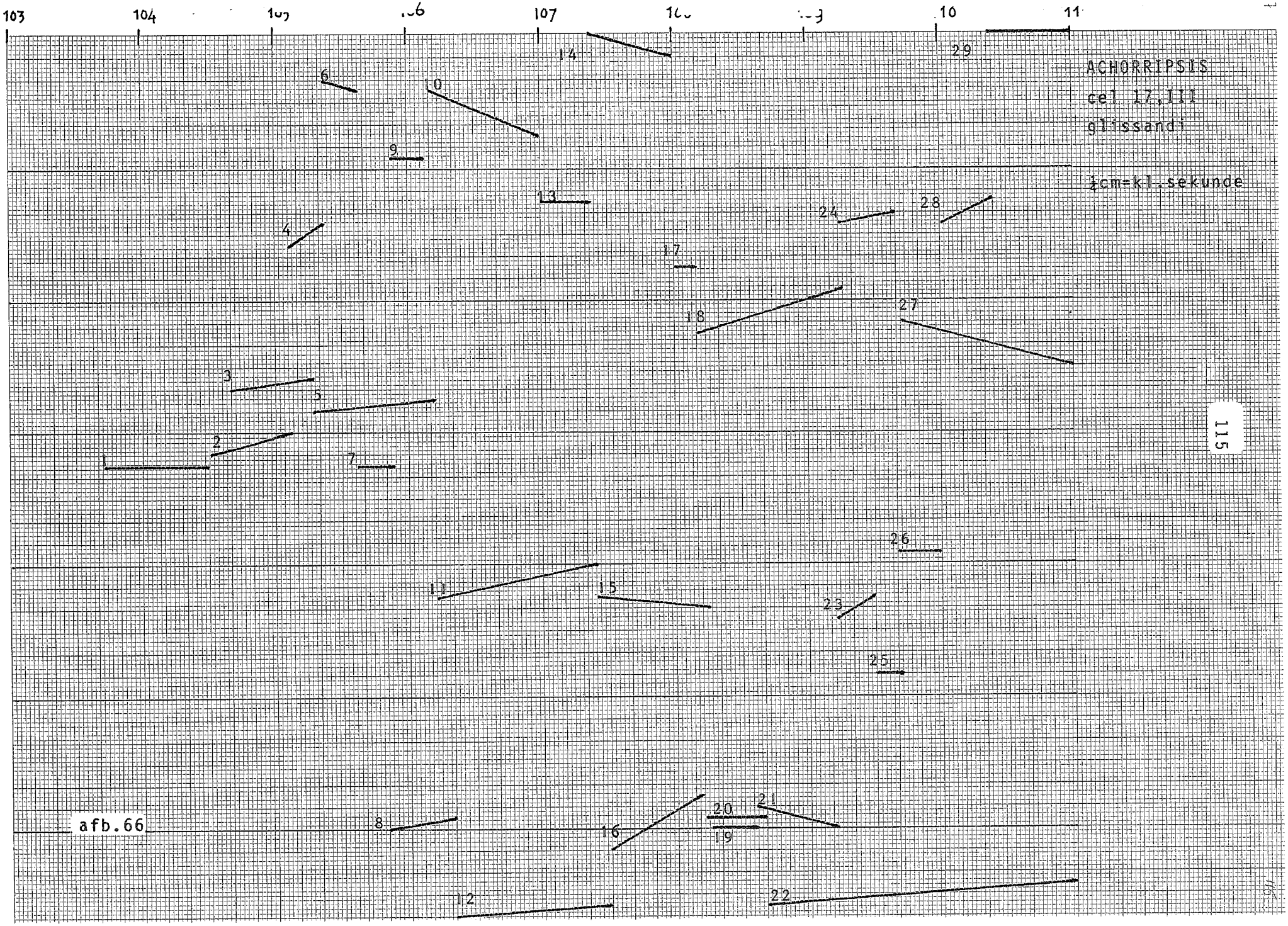
Hetgeen wil zeggen dat we voor het begrip 'temperatuur' nu niet het kwadraties gemiddelde hebben gebruikt, maar daarvoor in de plaats de standaardafwijking hebben gekozen. Omdat deze kleiner is dan het kwadraties gemiddelde a, geldt ongeveer het volgende:

$$\frac{2}{a\sqrt{\pi}} \doteq \frac{2}{s\sqrt{2\pi}}$$

waarmee de benadering van de Gauss verdeling en de door Xenakis gebruikte opnieuw gedemonstreerd is.

In afb 66 staat een grafiese weergave van de glissandi, gerekonstrueerd uit de partituur in de uitgave van Bote & Bock (Berlijn 1958). Met behulp van het 'staaltje' in afb 49 zijn de snelheden weer gemakkelijk te inventariseren in een tabel. Vermoedelijk zijn er een paar drukfouten in de partituur geslopen want, zoals al eerder opgemerkt, de snelheden hier laten zich niet gemakkelijk voegen naar de berekende verdeling in de tabellen.

Wat nu nog rest, is de berekening van de toonhoogte verdeling. We kunnen deze in een veel kortere uiteenzetting doornemen. De uitgebreide behandeling van de glissando-snelheden vindt zijn rechtvaardiging in het feit dat de Normale verdeling enerzijds zo'n belangrijke rol speelt in de theorieën over verdelingen, (statistiek en waarschijnlijkheidsleer) en vandaaruit zo gemakkelijk een begripskader te ontwikkelen is over verdelingen in hun algemeenheid; anderzijds in het feit dat Xenakis door zijn toespeling op de kinetiese gastheorie en het gebruik van het 'temperatuur'-begrip, nogal wat verwarring veroorzaakt bij de rekonstruktie van de door hem gebruikte methode. Bovendien laat de Maxwell-Boltzmann verdeling zien hoe verdelingen in de buurt van de Normale verdeling kunnen liggen en op welke fundamentele punten de (soms kleine) verschillen aan de dag treden. Ook de Poisson verdeling staat in nauw verband met de Gauss verdeling, en met name wanneer de parameter m daarin (voor gemiddelde dichtheid) groter wordt, benadert hij deze vrijwel. In het kader van Xenakis' streven om met 'een minimum aan kompositieregels' een stuk (als Achorripsis en de ST-stukken uit de jaren '58-62) te kunnen maken, van makro- tot mikrostruktureel niveau, is het van belang op te merken, dat er een zo groot mogelijke verwant-



afb.66

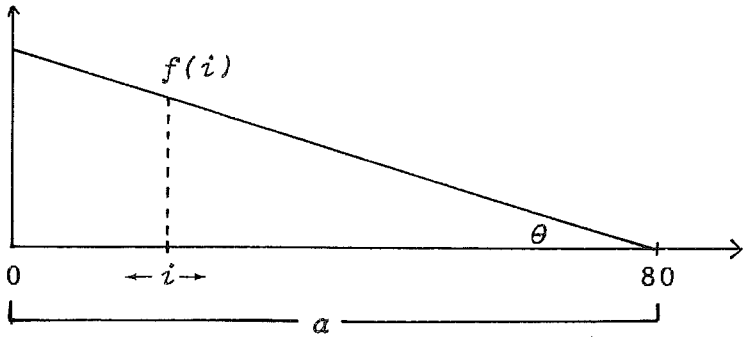
DIN A 3 297x420mm

schap bestaat tussen de diverse gebruikte technieken.

3.3.8. Om het toonhoogteprobleem op te lossen gaat Xenakis uit van de begintoonhoogte van elk glissando en stelt zich dan de vraag: gegeven een toonhoogte-gebied met een totaal-breedte (-bereik) van 80 kleine sekundes (van de laagste toon van de kontrabas tot een hoogste in de violen), wat is dan de kans dat een interval tussen twee elkaar opeenvolgende tonen deze of gene afmeting heeft. Volgens Xenakis wordt het antwoord daarop gegeven door de formule

$$f(i)di = \frac{2}{a}(1 - \frac{i}{a})di$$

waarin a de totale breedte in kleine sekundes is, en i elk willekeurig interval $< a$. di is de breedte van de intervalklasse die als schaaleenheid wordt gekozen voor berekeningen. Dit is een lineaire verdeling voor kontinue waarschijnlijkheid dwz een verdeling die in een grafiek voorgesteld wordt als een rechte lijn die de frekwentie aangeeft van een oneindig aantal intervallen tussen 0 en de bovengrens (hier 80). Zie afb 67.



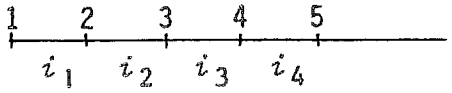
afb. 67

Deze verdeling gaat er maw. vanuit dat de kleinste intervallen het meest waarschijnlijk zijn, en dat ze minder waarschijnlijk worden naarmate ze groter worden. Evenals bij de rechthoek- of uniforme verdeling (cf. 3.1.2 - 3.1.4) hangt het er weer helemaal vanaf hoeveel waarden er tussen 0 en 80 gebruikt (toegelaten) worden om de som van alle $f(i)$ 1 te laten zijn. Hiervan is in de grafiek ook vanzelfsprekend de grootte van de hoek θ afhankelijk: hoe meer tussenliggende waarden, hoe kleiner θ (of hoe grover de schaal op de ordinaat bij gelijkblijvende θ).

Xenakis vermeldt niet of hij een fysiologiese of andere grond

(analogie) voor de keuze van deze verdeling op het oog had. Aangezien we in de praktijk (voorlopig nog wel) meestal met diskrete waarden te maken hebben, benaderen we het probleem nog maar even vanuit het diskrete geval en dragen daarmee een rekenmethode aan die eenvoudig te overzien is en de Xenakis-verdeling weer dicht benadert. Meer nog: in feite de verklaring voor de kontinue verdeling bevattend.

Voor het gemak gaan we even uit van een toonhoogteveld met maar 5 tonen (t=5). Tussen die 5 tonen bevinden zich 4 intervallen (zonder te letten op hun grootte, maar in het geval van de chromatiese getempereerde stemming, 4 kleine sekundes).



De prime (het nul-interval $i=0$) komt 5 maal voor als t=5.
Het interval i=1 komt op 4 plaatsen voor.
Het interval i=2 kan maar op 3 manieren gevoegd worden tussen 5 tonen. Etc (zie ook afb 26).
In een tabel:

i	Aantal manieren	In t uitgedrukt
0	5	t
1	4	$t - 1$
2	3	$t - 2$
3	2	$t - 3$
4	1	$t - 4$
	15	

Hieruit blijkt dat het aantal manieren uitgedrukt kan worden als een funktie van i, namelijk

$$f(i) = t - i$$

Er is dus een lineair verband tussen i en t. Het totaal aantal mogelijkheden is 15 = 5+4+3+2+1. Deze som is weer een funktie van t en wordt uitgedrukt met de formule

$$\sum_{o}^{t} n = \tfrac{1}{2}t(t+1) \qquad n = 0,1,2,\ldots,t.$$

Ter vergelijking: als t=5, dan $\frac{1}{2}t(t+1) = \frac{1}{2}.5(5+1) = 15$.
Derhalve is de kans dat het interval i=0 optreedt

$$P(0) = \frac{f(o)}{\frac{1}{2}t(t+1)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0.33$$

als we uitgaan van gelijke waarschijnlijkheden voor alle mogelijkheden.

PARENTHESE

We zien dat *'kans'* eenvoudig gedefinieerd wordt als *percentage* op een totaal aantal mogelijkheden. Maw. waarschijnlijkheidsleer is in de grond van de zaak niets anders dan de ontdekking (het opsporen) van deelverzamelingen uit totaal-verzamelingen. Als een totaal-verzameling niet in zijn geheel bekend is - zoals bij veel empiriese wetenschappen herhaaldelijk voorkomt - wordt hij gehypothetiseerd, evenals zijn deelverzamelingen. Steekproeven testen dan het hypothetiese model op zijn geldigheid. Op grond van'zijn nog steeds niet ondergraven betrouwbaarheid' worden vervolgens 'voorspellingen' gedaan. In ons geval (het komponeren van eindige verzamelingen) hebben we nimmer met voorspellingen te maken, maar altijd met de konstruktie van volledig inventariseerbare verzamelingen met hun volledig beschrijfbare verdelingen:zij zijn immers uitganspunt voor de produktie van het materiaal en zijn ordening! Komponeren heeft daarom niets met waarschijnlijkheid, maar alles met verzamelingen en hun verdelingen = organisatievormen te maken.

De algemene formule voor de verdeling van de intervalgrootten i met gegeven t is daarom

$$P(i) = \frac{f(i)}{\frac{1}{2}t(t+1)} = \frac{t-i}{\frac{1}{2}t(t+1)} = \frac{2}{t}\left(\frac{t-i}{t+1}\right). \qquad (1)$$

Als we deze formule nog eens met die van Xenakis voor kontinue waarschijnlijkheid vergelijken, zien we dat er grote verwantschap bestaat en dat de herkomst van de afzonderlijke termen ook gemakkelijk te rekonstrueren is:

Voor diskrete verdeling

$$P(i) = f(i) = \frac{2}{t}\left(\frac{t-i}{t+1}\right)$$

Voor kontinue verdeling

$$f(i) = \frac{2}{a}\left(1-\frac{i}{a}\right)$$

Als we in de diskrete verdeling hat aantal intervallen laten toenemen tot oneindig (tussen elke willekeurige onder- en bovengrens) dwz als $t \to \infty$, dan wordt de *eenheid* waarin we meten ook oneindig klein. Deze eenheid nu staat in de noemer van de verdeling ($t + \underline{\underline{1}}$). Hij wordt maw. verwaarloosbaar in het grensgeval (limietovergang), zodat de vergelijking wordt:

$$f(i) = \frac{2}{t}\left(\frac{t-i}{t}\right) = \frac{2}{t}\left(1-\frac{i}{t}\right)$$

Om nu in percentages te kunnen rekenen moeten we een faktor toevoegen die zorgt dat er bij elke berekening een aangepaste schaal met basiseenheid gebruikt wordt, waarmee de oppervlakte onder de kurve (in dit geval een schuine rechte lijn) altijd 1 wordt. Vandaar

$$P(i) = f(i)di = \frac{2}{t}\left(1-\frac{i}{t}\right)di \qquad (2)$$

We sluiten de redenering nu af met een tabel, waarin de resultaten van de berekeningen met behulp van beide verdelingsformules naast elkaar gezet zijn. (Zie afb 68)

i	$P(i)=\frac{2}{t}(\frac{t-i}{t+1})$	$28P(i)$		$P(i)=f(i)di$	$28P(i)$	(Xen.) $29P(i)$
0	0.1000	2.8000 →	3	0.105	3	3
1	0.0947	2.6516 →	3	0.101	3	3
2	0.0895	2.5060 →	3	0.093	3	3
3	0.0842	2.3576 →	2	0.088	2	3
4	0.0789	etc.	2	etc.	2	2
5	0.0737	↓	2	↓	2	2
6	0.0684		2		2	2
7	0.0632		2		2	2
8	0.0579		2		2	2
9	0.0526		1		2	2
10	0.0474		1		1	1
11	0.0421		1		1	1
12	0.0368		1		1	1
13	0.0316		1		1	1
14	0.0263		1		1	1
15	0.0211		1		0	0
16	0.0158		0		0	0
17	0.0105		0		0	0
18	0.0053		0		0	0
	1.0000		28		28	29

afb. 68

Omdat we maar 28 intervallen (tussen 29 glissando begintoonhoogten) nodig hebben, weten we bij voorbaat dat van de 81 intervallen (nul meegerekend) er slechts 29 gebruikt kunnen worden. Xenakis heeft daarom het gehele toonhoogteveld opgedeeld in (willekeurig?) 18 gelijke delen van 4½ kleine sekundes, een aantal dat op z'n minst kleiner moet zijn dan 29. In de diskrete verdeling moeten we de juiste maat voor di berekenen. Als in de voorgaande gevallen is deze omgekeerd evenredig met de som van alle uitkomsten uit $f(i)$. In dit geval is di daarenboven gelijk aan

$$\frac{a}{t} = \frac{80}{19} \doteq 4.211$$

NB. Xenakis heeft 29 intervallen in plaats van 28 berekend. Vermoedelijk omdat ook het interval van het eerste glissando tot de laatste uit het vorige fragment nog moest worden meegerekend.

Uiteraard moeten we nu alle i met 4.5 vermenigvuldigen. Daarna worden ze random gedistribueerd over alle in te vullen plaatsen tussen de 29 glissandi. De richting omhoog/omlaag wordt fifty-fifty en zo random mogelijk over alle plaatsen verdeeld. (zie ook 3.4.1). Bij de rekonstruktie vanaf de grafiese weergave in

afb 66 moeten we er rekening mee houden dat Xenakis schommelingen toelaat rondom alle 4.5*i*. Vooral het nul-interval heeft Xenakis vermeden. Daarvoor gebruikt hij de kleine sekunde (tussen de glissando-paren [1,2], [19,20] en [20,21]).

Tenslotte nog dit. Voor elke parameter met een onder- en bovengrens kan een dergelijke verdeling gebruikt worden. Xenakis noemt behalve toonhoogte-intervallen ook nog sterkte- en dichtheidsintervallen. Zoals we reeds zagen heeft hij voor deze twee parameters andere oplossingen gebruikt.

3.3.9. We kunnen nu gemakkelijk rekonstrueren hoe de tot stand koming van de overige cellen in z'n werk is gegaan. Voor elke cel is de gemiddelde dichtheid en het timbre gegeven. De dynamiek is waarschijnlijk 'staande vrije hand' over de cellen uitgezet. Waar geen strijkersglissandi zijn hoeven derhalve alleen de tijdsintervallen (met de van Poisson afgeleide formule) en de toonhoogte-intervallen (met de zojuist ontworpen formule) gegenereerd te worden. Als de matrix met de plattegrond van het gehele stuk klaar is, en de formules gekozen zijn die de détailstrukturen moeten genereren, kan de produktie van een stuk als Achorripsis geheel gemechaniseerd worden. Xenakis heeft deze basisuitganspunten inderdaad gebruikt om voor de grote hoeveelheid berekeningen de computer te kunnen inschakelen. Daaruit is de hele familie van ST-stukken ontstaan, zij het dat de aanpak daar aanzienlijk verfijnder is geworden, zoals we dadelijk zullen zien. ACHORRIPSIS is in zijn rigoureuze konsekwentheid eigenlijk te beschouwen als een PROTOTYPE van een nieuw soort komponeren, in de techniese zin van het woord. Dat heeft tot gevolg dat het stuk, met zijn ijzeren regelmaat van 28 maal een nieuw mengsel van timbres, op de luisteraar als een vrij droog stuk kan overkomen.
Het feit echter dat Xenakis zich (met opzet, naar zijn zeggen) zo beperkt heeft tot een dergelijke elementaire aanpak van een zo nauw omschreven opgave, heeft weer tot gevolg dat het een uitermate bruikbaar MODEL is geworden voor het ontwerpen van elastieser strukturen. We zullen zien dat Xenakis dat ook gedaan heeft. In ons kommentaar zullen we ingaan op de meer psychologiese en filosofiese implikaties van deze werkwijze, met name

in termen van waarneming: zijn betekenis in de ontwikkeling van muzikale *talen* als kommunikatie- en betekenissystemen, en de techniese konsekwenties die daar weer uit voort kunnen vloeien.

STOCHASTIESE MUZIEK, zoals Xenakis deze muziek heeft gedoopt, betekent dus, dat op een aantal niveau's (de parameter-variabelen) een *random*generator wordt ingeschakeld, die opereert op elementen uit verzamelingen die door een specifieke verdeling gekarakteriseerd (beheerst) worden. Verschillende natuurverschijnselen vertonen stochastiese processen of strukturen, zoals we in de aanvang van dit hoofdstuk al opmerkten. Xenakis doet, met zijn toespelingen daarop, een beroep op ons voorstellingsvermogen, om de besturing van klankmassa's, de 'masses sonores', op dezelfde of analoge wijze ter hand te nemen als de beschrijving en bestudering van dergelijke verschijnselen dat doen. D.i. met behulp van mathematiese modellen. Dat de problemen die daarbij rijzen op meerdere manieren benaderd en 'opgelost' kunnen worden, moge uit de voorafgaande paragrafen blijken. Het blijft een merkwaardig feit dat Xenakis voor de toonhoogte-intervallen niet een duidelijk aanknopingspunt met een aan de Poisson- of Gaussverdeling verwant verschijnsel legt (druppels die op een plaat uiteenspatten; licht dat diffuser wordt naar de uiteinden van een beschenen vlak e.d.), maw. met een verdelingstype dat een spreiding heeft die centripetaal of -fugaal is ('centrale tendentie' en/of 'excentriciteit') en die er in de grafiek uitziet als een vloeiende en gebogen kurve, met bv logarimiese basis.

We zullen, in het hierop volgende hoofdstuk ., nog een kort overzicht geven van de verdere uitwerking die Xenakis op dit uitganspunt toegepast heeft. De uiteenzetting daarvan staat in het hoofdstuk dat hij heeft gewijd aan de ontwikkeling van een computerprogramma voor dit algemene model. Het werk hieraan samen met een aantal technici van o.a. IBM France, is waarschijnlijk ook aanleiding geweest voor het aanbrengen van enkele veranderingen en vooral: toevoegingen, die het totaal aantal berekeningen weliswaar opvoeren, maar die meer gericht zijn op grotere flexibiliteit in de makro-struktuur, en die aan de détailkonstruktie een extra 'bewustzijn' meegeven in de vorm van een mathematies kort *geheugen*. Deze laatste stap kunnen we meteen

beschouwen als een aanzet tot de Markov-processen die in het daaropvolgende hoofdstuk aan de orde komen. We zullen ons niet bezig houden met de implikaties voor het computerprogramma om vier redenen: 1) uit gebrek aan deskundigheid; 2) omdat de meeste komponisten niet met de computer in aanraking zullen komen; 3) omdat de diverse methoden ook met de hand en met behulp van tabellen uitgevoerd kunnen worden en 4) omdat het ons voornamelijk te doen is om inzicht in de gebruikte technieken en generalisatie van hun toepasbaarheid te krijgen.

3.4.0. *"Een muziekwerk bestaat uit een opeenvolging van segmenten of delen, die elk a_i seconden lang zijn".*

We gaan dus niet meer uit van het strakke korset van matrix M, waarin alle segmenten van te voren op 15 seconden waren gezet. Xenakis stelt nu, dat ook de lengten van deze segmenten op een stochastiese wijze kunnen worden verdeeld. Omdat deze opgave geheel verwant is aan de opgave om tijdsintervallen te verdelen, gebruikt hij dezelfde formule (generator) als in 3.3.2 voor de tijdsintervallen tussen de beginpunten van de glissandi:

$$P(x) = me^{-mx}dx \qquad \text{(zie 3.3.2)}$$

waarin x de lengte van segment a_i is en m de gemiddelde lengte.

3.4.1. i. Voor de distributie van gemiddelde *dichtheden* per segment, gaat Xenakis niet meer van Poisson uit. De nieuwe verdeling baseert hij op de volgende redenering: Voor een gegeven instrumentaal ensemble kan een maximum vastgesteld worden

$$\frac{N_{max}}{a_i}$$

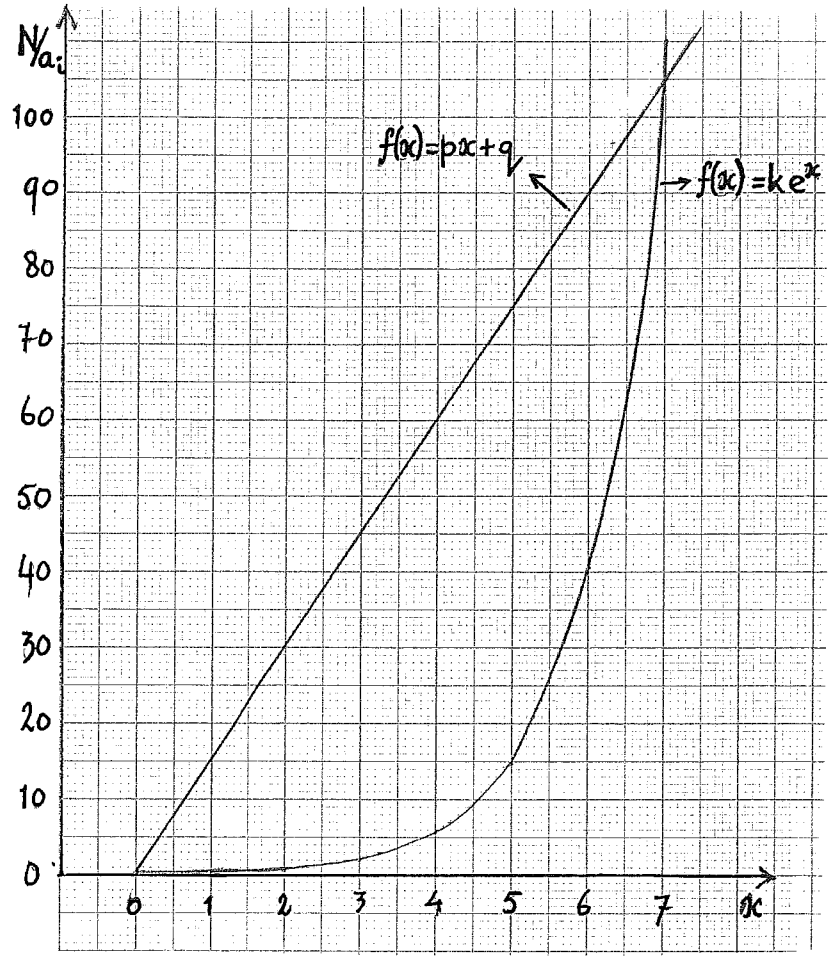
zijnde het geopteerde maximum aantal klanken per sekonde dat het kan spelen. Aangezien een minimum willekeurig gekozen kan worden, wordt dit door een subjektieve keuze van de komponist bepaald:

$$\frac{N_{min}}{a_i}$$

Xenakis zegt nu, na experimenten gekozen te hebben voor logaritmiese progressie van N_{min} tot N_{max}, met e=2.71827 als grondtal (zoals ook bij de Poissonverdeling). Om te zien wat het verschil is tussen een lineaire en logaritmiese (exponentiele) toename, staan in afb 69 beide verdelingen getekend. Als we een variabele x kiezen, worden beide funkties resp. in de volgende standaardvormen uitgedrukt:[29)]

(a) $f(x) = px + q$ (b) $g(x) = ke^{x}$

Stel dat we een minimum dichtheid N_{min}=0.1 klank per seconde, en een maximale dichtheid N_{max}=plm 100 klanken per seconde nemen. (Een redelijk groot orkest kan dit maximum realiseren). In de formules verwerkt, moeten q in (a) en k in (b) nu op 0.1 ge-



afb. 69

zet worden om bij $x=0$ het gewenste minimum te krijgen, Als we de exponentiele kurve nu tekenen met behulp van de getallen uit de tabel in afb 70, zien we, dat bij $x \cong 7$ het max. $N_{max}=100$ ongeveer bereikt wordt.

x	e^x	$0.1e^x$	$15x + 0.1$
0	1.000	0.1	0.1
1	2.718	0.27	15.1
2	7.389	0.74	30.1
3	20.086	2.01	45.1
4	54.598	5.46	60.1
5	148.413	14.84	75.1
6	403.429	40.34	90.1
7	1096.633	109.66	105.1

afb. 70

We kunnen nu bv zeggen:
"Als we in 8 stappen van het minimum naar de maximale dichtheid gaan, *op exponentiele wijze* en met e als logaritmiese basis, krijgen we resp. $g(x)=0.1 \rightarrow 0.27 \rightarrow 0.74... \rightarrow 109.66$ klankgebeurtenissen per seconde."

Uit de grafiek, of uit een meer verfijnde tabel, kunnen we ook een dichtheidstoename in meer of minder stappen aflezen.

Stel dat we in een zelfde aantal stappen *op lineaire wijze* van het minimum naar het maximum willen, dan moeten we uitrekenen hoe groot p moet zijn. De berekening gaat als volgt: we weten dat (px + q) bij x=0 q wordt. In ons geval q = 0.1 = N_{min}. We weten ook dat we (px + q) ongeveer (of precies) 100 willen hebben bij x=7 dus:

$$px + q = 100$$

$$p.7 + 0.1 = 100$$

$$p \doteq \frac{100 - 0.1}{7} \doteq 14.27$$

In onze tabel hebben we p=15 gesteld, waardoor het maximum nog iets dichter bij dat van het exponentiele maximum komt bij gelijke x=7. We zien, dat we de sterkte van de toename kunnen beinvloeden door p te veranderen, in casu de *schuinte* (helling) van de lijn (cf 1.1.1. en 1.1.2). We kunnen die invloed op de sterkte-toename in de exponentiele funktie (als we x bv alleen in hele getallen i.e. in stappen van hele getallen willen handhaven) ook bereiken door een konstante p bij de x in te voeren zodat $g(x) = ke^{px}$ (zie appendix I)

Nemen we bv p=$\frac{1}{2}$, dan verdubbelt het aantal stappen, immers nu bereikt de funktie pas zijn waarde $g(x)$ = 109.66 bij x=14. Stellen we p=$\frac{1}{3}$, dan verdrievoudigt het aantal stappen en bereiken we diezelfde waarde pas bij x=21. Het aantal stappen is dus omgekeerd evenredig met p. Omdat px de (natuurlijke) logaritme van e is, geldt immers

$$ke^{px} = n \qquad e^{px} = \frac{n}{k} \qquad px = \log\frac{n}{k} \qquad p = \frac{\log\frac{n}{k}}{x}$$

waarin n voor de gelegenheid het maximum N_{max} voorstelt.

Als we van te voren het aantal stappen (x) en N_{min}=k en N_{max}=n vastgesteld hebben, kunnen we p onmiddellijk berekenen. Ter kontrole: stel k = 0.1, n = 100 en x = 21 (stappen), dan

$$p = \frac{\log\frac{n}{k}}{x} = \frac{\log\frac{100}{0.1}}{21} = \frac{\log 1000}{21} \doteq \frac{6.9}{21} \doteq 0.329 \doteq \frac{1}{3}$$

We kunnen nu dus *elke gewenste* snelheidstoename van dichtheden berekenen met lineaire en exponentiele ontwikkelingen. (We kunnen natuurlijk ook de basis van de exponentiele funktie nog veranderen, in casu een ander grondtal kiezen.)

ii. Hoe worden nu de gemiddelden voor alle segmenten gekozen? Xenakis kiest weer voor een random-distributie, maar introduceert een bepaald *geheugen-mechanisme* om de volgorde te kunnen reguleren met een 'zekere ingebouwde garantie' voor fluktuaties. Stel dat we de dichtheid van het eerste segment willekeurig vaststellen op D_{a_1}. Deze dichtheid korrespondeert met een zekere x op de x-as van de grafiek. Het gebied van deze as dat we ter beschikking hebben, is aan de onder- en bovenkant begrenst door onze premissen over minimum en maximum dichtheid:

$$0 \leqslant x \leqslant \log\frac{n}{k} \qquad\qquad (\frac{n}{k} = \frac{N_{max}}{N_{min}})$$

We kunnen dus zeggen dat D_{a_1} een punt x op dit lijnsegment is. De volgende dichtheid D_{a_2} is weer een punt op de x-as etc. Het probleem is maw. analoog geworden aan de wijze waarop het toonhoogteprobleem in Achorripsis werd aangepakt: "Hoe groot is de kans dat een toonhoogteinterval van zekere afmeting optreedt gegeven een bepaalde onder- en bovengrens van het totale toonhoogtegebied". (zie 3.3.8). In termen van dichtheid: "Hoe groot is de kans dat een dichtheidsinterval (verschil!) van zekere grootte optreedt gegeven een onder- en bovengrens in het totale dichtheidsgebied". We zouden dus maw. een tabel met (logaritme) *intervallen* kunnen genereren met de in 3.3.8 gevonden formules:

$$\text{(a)}\ P(i) = \frac{2}{t}(\frac{t-i}{t+1}) \qquad\qquad \text{(b)}\ P(i) = \frac{2}{a}(1-\frac{i}{a})di$$

De gevonden percentages hebben betrekking op de x-en (de logaritme) en worden vervolgens'vertaald' tot waarden die de exponentiele funktie $g(x)$ voortbrengt. In de diskrete en kontinue funkties staan dus resp. t voor het aantal waarden van x dat we wensen, en a voor de lengte van het domein van x, in beide gevallen tussen N_{min} en N_{max}. ($a = N_{max} - N_{min}$)We gaan er een voorbeeld van geven.

In 3.3.8 hadden we het totale toonhoogtebereik ingedeeld in 18 gelijke delen (van 4½ kleine sekunde). Het totaal aantal toonhoogte-intervallen dat we nodig hadden was 28 (tussen 29 glissando beginpunten). Als we nu eens een muziekwerk zouden maken bestaande uit 29 segmenten (met lengtes die berekend zijn in 3.4.0) dan moeten we 28 dichtheidsintervallen (-verschillen) berekenen. Stel dat we nu het totale dichtheidsbereik tussen N_{min}=0.1 en N_{max}=plm 100 klanken per seconde ook eens onderver-

deelde in 18 (logaritmiese!) delen, dan moeten we derhalve de ruimte tussen $x=0$ en $x=7$ in 18 gelijke delen verdelen. Elk deeltje wordt dus $\frac{7}{18} \cong 0.388$ dwz we lopen door het domein van x met stappen ter lengte van ongeveer 0.38. In afb 71 staan weer de intervallen als in afb 68; in de tweede kolom dezelfde intervallen vermenigvuldigd met 0.38, analoog aan het vermenigvuldigen met 4.5 in het toonhoogte voorbeeld: immers ons huidige veld is in werkelijkheid $0 \leqslant x \leqslant 7$; het toenmalige toonhoogteveld was $0 \leqslant t \leqslant 80$. In beide gevallen moet het in 18 delen opgedeeld worden. In de kolom $P(i)$ is gekozen voor formule (b) hierboven, de kontinue verdeling die Xenakis heeft gebruikt. Daarnaast $28P(i)$ om de gewenste 28 intervallen te krijgen. In de daarop volgende kolom is een fifty-fifty verdeling voor plus en min gemaakt om te garanderen dat 'vergroten en verkleinen ten opzichte van voorgaande verschillen' in evenwicht zijn. In de laatste kolom tenslotte een random-volgorde voor de afzonderlijke i's.

i	$x=0.38i$	$P(i)=f(i)di$	$28P(i)$	+/-	random volgorde
0	0.00	0.105	3	2/1	17-22-24
1	0.38	0.101	3	1/2	3 -5 -14
2	0.76	0.093	3	2/1	9 -21-16
3	1.14	0.088	2	1/1	19-10
4	1.52	etc.	2	1/1	20-6
5	1.90	↓	2	1/1	13-27
6	2.28		2	1/1	18-8
7	2.66		2	1/1	25-1
8	3.04		2	1/1	2 -23
9	3.42		2	1/1	4 -11
10	3.80		1	0/1	15
11	4.18		1	1/0	28
12	4.56		1	0/1	26
13	4.94		1	1/0	12
14	5.32		1	0/1	7
15	5.70		0		
16	6.08		0		
17	6.46		0		
18	6.84		0		
			28		

afb. 71

De werkwijze is nu deze. (zie afb 72). In kolom (1) zetten we het nummer van elk segment van a_1 tot a_{29}.

i. De eerste gemiddelde dichtheid X voor segment a_1 zetten we op een willekeurig gekozen waarde. We kozen 4.94.

ii. Deze waarde X_{a_1} is nu het startpunt voor de berekening van de volgende waarde X_{a_2}. In kolom (2) zetten we die waarde.
iii. Vervolgens kijken we in afb 71 naar de kolom met random-getallen en zoeken 1 op. Deze korrespondeert allereerst met x=2.66 uit de desbetreffende kolom (x=0.38i) en vervolgens met '-' uit de kolom +/-.
iv. In kolom (3) zetten we de gevonden x=2.66 en tussen kolom (2) en (3) het min-teken.
v. In kolom (4) komt de uitkomst van de optelling tenslotte.

(1)	(2)	(3)	(4)	$D_{a_i}=0.1e^{Xa_i}$ (afgerond)
$X(a_1)$	(vastgesteld op)	=	4.94	14.0
a_2	4.94	− 2.66 =	2.28	0.9
a_3	2.28	+ 3.04 =	5.32	20.4
a_4	5.32	+ 0.38 =	5.70	29.9
a_5	5.70	− 3.42 =	2.28	0.9
a_6	2.28	− 0.38 =	1.90	0.7
a_7	1.90	− 1.52 =	0.38	0.1
a_8	0.38	+ 5.32 =	5.70	29.9
a_9	5.70	− 2.28 =	3.42	3.1
a_{10}	3.42	+ 0.76 =	4.18	6.5
a_{11}	4.18	− 1.14 =	3.04	2.1
a_{12}	3.04	+ 3.42 =	6.46	63.9
a_{13}	6.46	− 4.94 =	1.52	0.5
a_{14}	1.52	+ 1.90 =	3.42	3.1
a_{15}	3.42	− 0.38 =	3.04	2.1
a_{16}	3.04	+ 3.80 =	6.84	93.0
a_{17}	6.84	− 0.76 =	6.08	43.7
a_{18}	6.08	+ 0.00 =	6.08	43.7
a_{19}	6.08	− 2.28 =	3.80	4.5
a_{20}	3.80	+ 1.14 =	4.94	14.0
a_{21}	4.94	+ 1.52 =	6.46	63.9
a_{22}	6.46	− 0.76 =	5.70	29.9
a_{23}	5.70	+ 0.00 =	5.70	29.9
a_{24}	5.70	− 3.04 =	2.66	1.4
a_{25}	2.66	− 0.00 =	2.66	1.4
a_{26}	2.66	+ 2.66 =	5.32	20.4
a_{27}	5.32	− 4.56 =	0.76	0.2
a_{28}	0.76	+ 1.90 =	2.66	1.4
a_{29}	2.66	+ 4.18 =	6.84	93.0

afb. 72

Deze operatie wordt nu uitgevoerd voor alle volgende segmenten. Er kan zich het probleem voordoen dat een optelling ons buiten de toegestane grenzen van $0 \leqslant x \leqslant 7$ voert. Het kan in dat geval nodig zijn een plusteken in een minteken te veranderen. Als ook deze oplossing niet toereikend is, moeten we een volgend nummer uit de random-reeks kiezen tot we er een gevonden hebben die voldoet. We kiezen dan het (de) overgeslagen nummer(s) bij

de eerst volgende operatie. Etc.

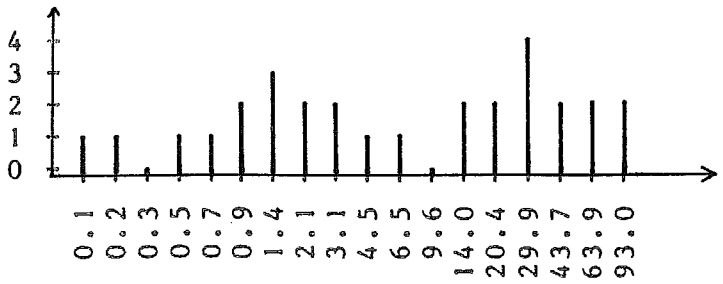
De laatste handeling bestaat nu uit het berekenen van de met x korresponderende dichtheden (de waarden op de gebogen kurve uit afb 69). Dat wil zeggen, uitrekenen wat

$$0.1e^{Xa_i}$$

wordt voor alle gevonden waarden van X. Deze staan in de laatste kolom, afgerond tot op 1 decimaal.

Dit zijn dus de uiteindelijke dichtheden per seconde van alle 29 segmenten. Let nu goed op: we hebben dus NIET gehandeld vanuit de gedachte een speciale verdeling van deze *dichtheden* te krijgen, maar een speciale verdeling van *verschillen tussen dichtheden* (en dus: fluktuaties in elkaar opeenvolgende dichtheden)! Precies zoals bij het toonhoogteprobleem, waar we geen verdeling van eksakte toonhoogten konstrueerden, maar van intervallen daartussen. De toonhoogten zelf (de dichtheden zelf), zijn een 'automaties gevolg' van deze verdeling. In het geval van Achorripsis hebben we al gezien dat we voor de dichtheden zelf ook prima een verdeling kunnen konstrueren (bv Poisson). In 3.2.2 (zie afb 39 in het bijzonder) hebben we voor eksakte toonhoogten ook een uitgebreid voorbeeld gegeven. In dát geval zijn de intervallen weer een automaties gevolg van dié verdeling.

Laten we nog even kijken hoe zo'n door het toeval verkregen verdeling er uit kan zien. In afb 73 staat een diagram van de verdeling van de werkelijke dichtheden uit onze werkwijze verkregen. We zien dat hij twee toppen heeft (twee-modaal). Hij had er ook geheel anders kunnen uitzien. Het verschil met de Poissonverdeling behoeft daarom nauwelijks enig betoog.



afb. 73

3.4.2. De samenstelling van het timbre gedurende elk segment, is een opgave die als volgt wordt aangepakt. Allereerst stellen we een lijst samen van alle timbre-klassen die we in het stuk tot onze beschikking hebben. We moeten daarbij goed bedenken - en het is de verdienste van Xenakis dat hij zich daar van meet af aan van bewust van is geweest - dat zo'n lijst niet hetzelfde is als een lijst met de verschillende instrumentenklassen erop. "Arco normale" en "tremolo sul ponticello" zijn twee duidelijk onderscheiden timbres op één en hetzelfde instrument. Terwijl een zachte klarinettoon in een bepaald register verdacht veel op een fluittoon kan lijken. Voor elk stuk maken we daarom van te voren een lijst met alle timbres die we voornemens zijn te gaan gebruiken. Deze *klassen* gaan we vervolgens nummeren van 1 tot r.

Per segment is het dan een kwestie van hoeveel procent van elke klasse vertegenwoordigd is. Maken we bv een stuk voor strijkkwartet, dan zou de volgende lijst kunnen worden samengesteld:

KLASSE	TIMBRE
I	Arco normale
II	Arco tremolo
III	Arco tremolo sul ponticello
IV	Arco col legno
V	Col legno battuto
VI	Pizzicato

Natuurlijk kan hier nog van alles aan toegevoegd worden of ook: weggelaten worden. Bovendien kunnen per klasse nog onderverdelingen gemaakt worden. Bv in Arco normale kan nog worden onderscheiden tussen a)normaal gestreken langere tonen
b)normaal gestreken korte (staccato) tonen
of tussen a')sul tasto
b')position normale
etc.

Hoe wordt nu de verdeling van de timbres over het gehele stuk? Xenakis kiest de volgende oplossing.
De verdeling wordt gekoppeld aan de dichtheid zoals berekend in 3.4.1, en wel op de volgende wijze. We herinneren ons dat deze uitgedrukt werd met

$$D_{a_i} = 0.1e^{Xa_i}$$

(zie afb 72), waarin a_i een of ander segment voorstelt. De beslissende komponent daarin is de exponent X_{a_i}, de natuurlijke logaritme. Deze kon in ons voorbeeld waarden aannemen tussen 0 en 7, zoals op de x-as van de grafiek in afb 70 te zien was. De koppeling die nu plaats vindt is er dus een tussen deze variabele en de afzonderlijke timbreklassen. Een koppeling tussen twee domeinen kan uitgedrukt worden in een matrix waarin op de êne as de logaritmen staan, op de andere de timbres.

Voor het gemak gaan we er even vanuit dat we 6 timbres hebben (bv die van het strijkkwartet hierboven) en 6 verschillende dichtheden die op een of andere manier over een heel muziekwerk per segment verdeeld zijn. We kunnen dan een 6x6 matrix maken. In elk segment (met gegeven dichtheid) kunnen we nu het aantal van elke timbreklasse uitdrukken in procenten. Bij elkaar opgeteld moeten deze 100% zijn. In afb 74a staat zo'n matrix afgebeeld: van boven naar beneden 6 verschillende dichtheidsklassen; van links naar rechts de 6 verschillende timbreklassen.

	I	II	III	IV	V	VI
0	0	$6\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	20	$26\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}$
1	$6\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	20	$26\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}$	0
2	$13\frac{1}{3}$	20	$26\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}$	0	$6\frac{2}{3}$
3	20	$26\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}$	0	$6\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
4	$26\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}$	0	$6\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	20
5	$33\frac{1}{3}$	0	$6\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	20	$26\frac{2}{3}$

(a)

	I	II	III	IV	V	VI
7	0	7	13	20	27	33
6	5	11	18	25	32	9
5	10	16	23	29	19	3
4	14	21	28	29	1	7
3	19	26	32	5	6	12
2	24	30	14	4	11	17
1	29	23	2	9	15	22
0	33	0	7	13	20	27
kolomtotalen:	134	134	137	134	131	130

(b)

	I	II	III	IV	V	VI
3	26	32	12	5	6	19
1	15	9	29	23	22	2
7	13	0	33	20	7	27
2	11	17	14	24	30	4
5	29	10	16	19	23	3
6	11	5	18	32	25	9
4	28	14	7	21	1	29
0	33	27	20	13	0	7

(c)

afb. 74

In een segment met dichtheidsklasse 3 zien we bijvoorbeeld dat timbre I voor $13\frac{1}{3}$% vertegenwoordigd is, timbre II voor 20%, timbre III voor $26\frac{2}{3}$ etc. Timbre V heeft pauze in zo'n segment. In deze matrix is er vanuit gegaan, dat alle timbres gelijk vertegenwoordigd zijn over alle dichtheidsklassen. Als elke dichtheidsklasse ook even sterk vertegenwoordigd is in een muziekwerk, betekent dit ongeveer dat elke timbreklasse een even groot aandeel in het spelen van het gehele werk heeft.

In ons voorbeeld met logaritmen die bepalend zijn voor de gemiddelde dichtheden per segment, hadden we echter een kontinu domein van $0 \leqslant x \leqslant 7$.

Stel even dat x in stappen van hele getallen gaat, dan moeten we nu een matrix van 8x6 maken, zoals afgebeeld in afb 74b. In elke rij, dwz in elke afzonderlijke dichtheidsklasse uitgedrukt in hele logaritmen, is het totaal weer 100%. (NB. in de bovenste rij (7) staan dezelfde percentages als in (o) van matrix a, alleen afgerond voor het gemak). Nu is de grote moeilijkheid bij de konstruktie van een mxn matrix met $m \neq n$, om ervoor te zorgen dat alle rijen opgeteld 100 blijven geven (immers elk segment moet voor honderd procent met timbres 'gevuld' zijn) en alle kolommen een gelijk totaal krijgen (om te zorgen dat het aandeel van elk timbre zo gelijk mogelijk is). Een oplossing voor dit probleem bereiken we door de matrix in een tekening om te zetten. In afb 75a worden de timbres weergegeven door de gearceerde gebieden. De horizontale as is in percentages van 0 tot 100 onderverdeeld. Rechts langs de matrix staan de dichtheidsklassen die we in matrix a gebruikt hebben van 0 tot 5. Links dezelfde vertikale as, maar nu onderverdeeld in gelijke porties van 0 tot 7. We gaan nu even uit van matrix a, echter met *afgeronde* percentages. We zien in die matrix dat timbreklasse I in 6 stappen van 0 naar $33\frac{1}{3}$ loopt en dat de toename per stap konstant is ($+6\frac{2}{3}$) en dus lineair, zodat hij met behulp van een rechte lijn getekend kan worden. We kijken in de tekening voorlopig alleen naar de cijfers 0 tot en met 5 die rechts van onder naar boven op gelijke afstanden de tekening doorsnijden via de stippellijnen. Als we nu een rechte lijn trekken van links onder op 0% tot de bovenste lijn 5 op 33% (afgerond!) snijdt deze lijn de stippellijnen automaties op resp. $6\frac{2}{3}$%, $13\frac{1}{3}$%, 20% en $26\frac{2}{3}$%. Timbreklasse II begint in matrix a op $6\frac{2}{3}$%, neemt op

identieke wijze toe tot $33\frac{1}{3}$% op dichtheid 4, dwz de stippellijn 4 in de tekening; op dichtheid 5 is hij weer 0. We tekenen nu een rechte lijn op $6\frac{2}{3}$ (afgerond 7)% rechts van timbreklasse I op de onderste lijn, naar 33% rechts van deze klasse op stippellijn 4, en vandaar een rechte lijn terug naar 0% rechts van diezelfde klasse op de bovenste lijn.

Dit procédé zetten we voort tot de laatste timbreklasse ingetekend is. De referentiepunten zijn dus

a) de onderste lijn, waar alle percentages uit de matrix-rij 0 naast elkaar staan (automaties samen 100%!)

b) de lijnen waar elke klasse zijn 33% bereikt, getekend 33% rechts van zijn voorganger;

c) de bovenste lijn, waar de eindpunten liggen op afstanden die korresponderen met rij 5 uit de matrix.

Nu gaan we de tekening doorsnijden met de lijnen 0 tot en met 7, weer op gelijke afstanden, en vullen overal in hoe groot de afstanden zijn tot de snijpunten met de zojuist getrokken lijnen. (NB. alle getallen worden voor het gemak weer afgerond). Vanzelfsprekend is de som van die getallen op elke lijn van links naar rechts weer 100. Horizontaal zitten we dus alvast goed. Vullen we deze getallen allemaal in matrix b in, dan zien we bij optelling van de kolommen dat bij benadering alle timbres gelijk vertegenwoordigd zijn. Het is een moeilijk karwei om ze precies gelijk te krijgen, maar voor ons doel is deze benadering ruimschoots bevredigend.

Daarom kunnen we de resultaten nu in een vereenvoudigde tekening weergeven, zoals is gedaan in afb 75b. De lijnen zijn nu getrokken van snijpunt tot snijpunt op de vette lijnen 0,1,...7. We weten dat deze getallen de logaritmen voorstellen van de dichtheidsformule, de variabele exponent X van e. Deze (stochastiese!) variabele heeft als domein echter de verzameling reële getallen van 0 tot 7, is dus kontinu en kan alle waarden aannemen tussen deze twee buitengrenzen. In de tabel van afb 72 zien we bv dat Xa_1=4.94, dat is dus iets kleiner dan 5. Kijken we naar tekening (b) dan zien we bv in de ruimte van timbre III 14% staan bij X=5, en 32% als X=4. Als dus X=4.94 zal (afgerond) het percentage van timbreklasse III ongeveer 15% bedragen. Maw. de percentages van alle timbreklassen kunnen worden afgelezen op een lijn die ik kan trekken van links naar rechts op een hoog-

te van 4.94. Als de computer dit berekent kan hij gebruik maken van de volgende formule

$$Q_t = (a-X)(Q_{a,t}-Q_{a+1,t})+Q_{a,t}$$

Q_t= het gevraagde percentage van timbreklasse t. (in ons geval t=I,II,...VI)

a en $a+1$ zijn hele getallen, maar zodanig dat $a \leqslant X \leqslant a+1$ (in ons geval a=0,1,2,...7)

$X=\frac{\log\frac{n}{k}}{p}$ (zie 3.4.1, i.)

Q_a en Q_{a+1} zijn percentages vermeld in de tekening (die fungeert als een set van input-data).

Voorbeeld: X=4.94; dan is a=4 en $a+1$=5, dus als we het percentage van t=III willen weten:

$$Q_{III} = (4 - 4.94)(32 - 14) + 32 = 15.08 \cong 15.$$

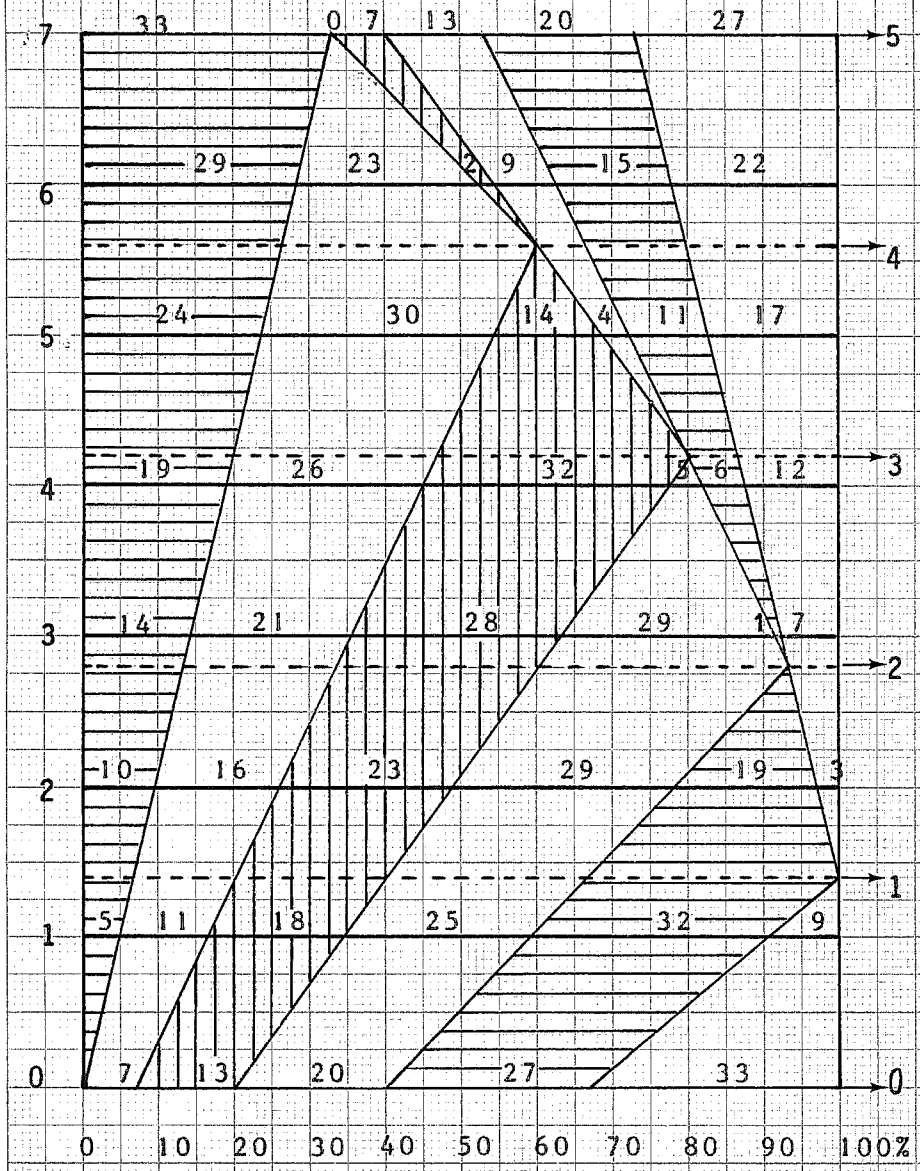
Omdat de dichtheden per segment toch al stochasties verdeeld zijn, zouden we tevreden kunnen zijn met de input-gegevens uit tekening (b). Xenakis zegt dat de samenstelling van zo'n tekening "vanzelfsprekend precisiewerk is van grote komplexiteit en nauwkeurigheid". Wat hij daar precies mee bedoelt, wordt, uit zijn teksten althans, niet duidelijk. (FM p. 138). Als we naar de tekening in FM p. 139 kijken, het tableau van timbrepercentages in ST 10-1, konstateren we op het oog een betrekkelijke onregelmatigheid vergeleken met onze tekening (b). Xenakis zegt dat deze arbitrair is. Als we een random-koppeling wensen tussen timbre en dichtheid (hetgeen in de lijn van deze hele komponeermachine ligt), kunnen we uitgaan van de gegevens in tekening (b) en bijbehorende matrix b. Ons beperkend tot de matrix: deze wordt in twee stadia 'gerandomiseerd':

a) de rijen zijn onderling verwisselbaar;

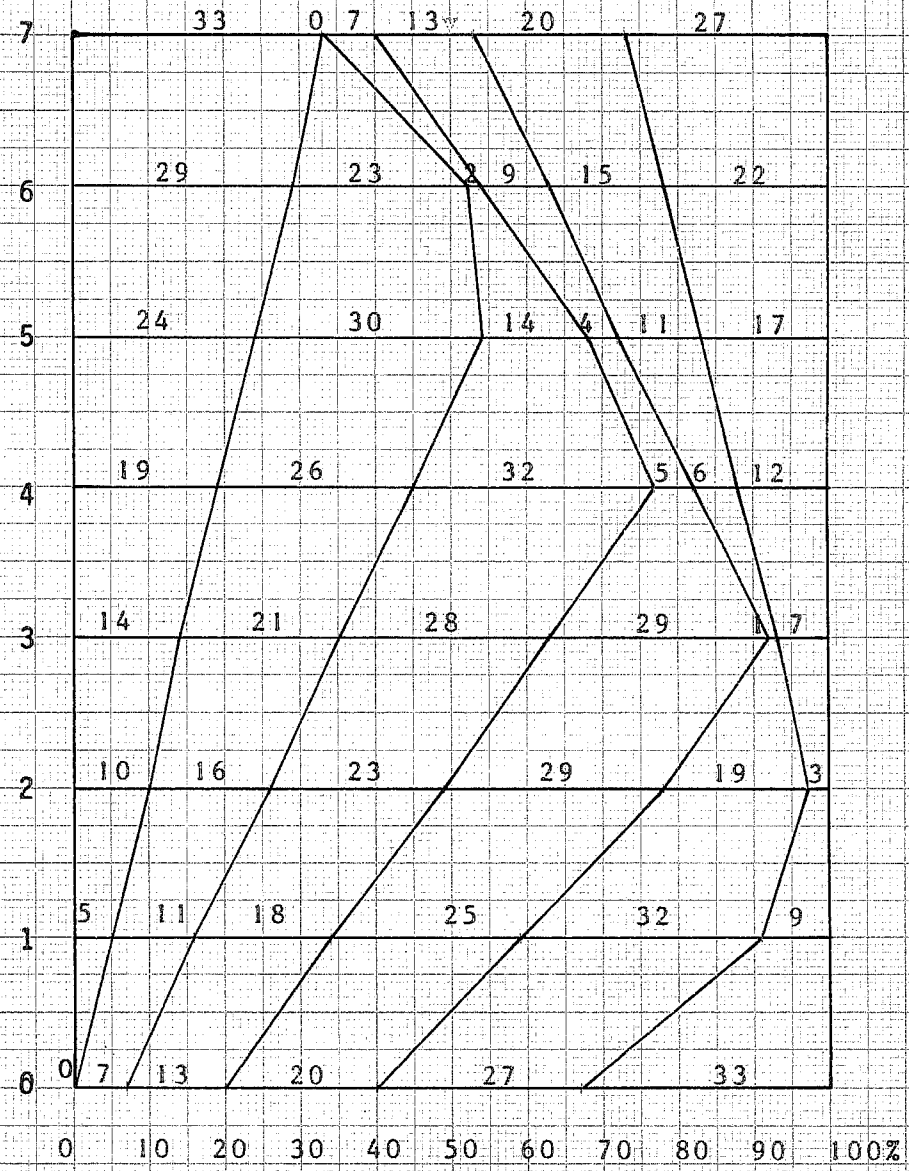
b) binnen elke rij zijn de getallen onderling verwisselbaar.

Een voorbeeld van zo'n operatie konstrueerden we in matrix c en de bijbehorende tekening (c) van resp. afb 74 en 75. Op het oog vertoont deze tekening grote (statistiese) overeenkomst met Xenakis' tekening in FM.

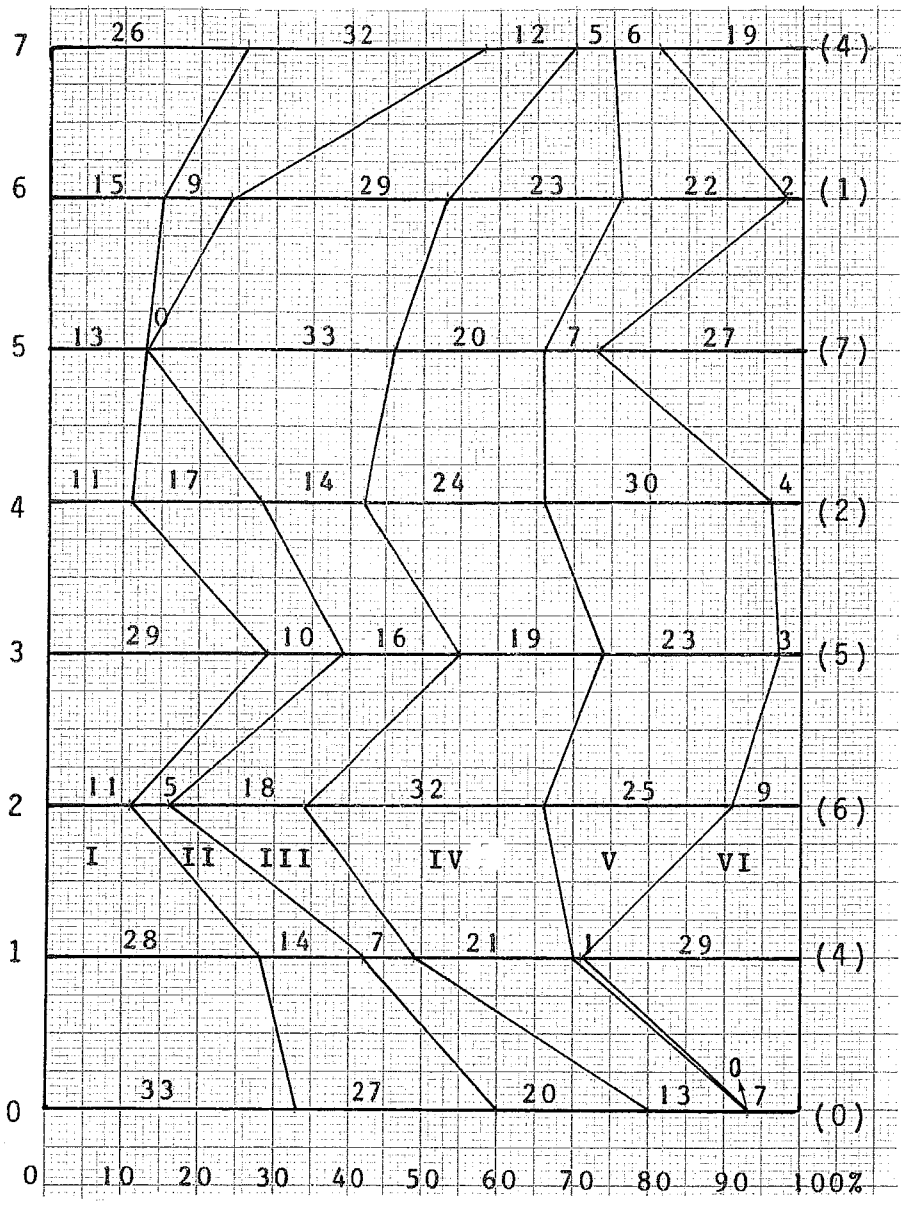
Natuurlijk kan de komponist vanuit zijn persoonlijke voorkeur een koppeling tot stand brengen van zeer specifieke timbre-kombinaties bij de verschillende dichtheden. Maar aangezien onze opgave uit het vinden van een *niet-deterministiese* oplossing bestaat, lijkt de zojuist voorgestelde random-koppeling de meest adekwate.



afb. 75a



afb. 75b



afb. 75c

3.4.3. Het tijdstip waarop elke klank moet optreden per segment, wordt weer bepaald door een random-verdeling van de tijdsintervallen tussen alle klanken. Deze is dezelfde als die uit 3.2.2:

$$P(x) = me^{-mx}dx$$

waarin x = een interval, meestal gekozen uit een repertoire van trapsgewijs opvolgende intervalgrootten op gelijke afstand van elkaar (interval-grootte-klassen; we weten echter dat de verdeling kontinu is en percentages genereert van x-en tussen twee buitengrenzen - zie afb 51);
en m = de gemiddelde dichtheid van het onderhavige segment.
De berekeningen leiden uiteindelijk tot de konstruktie van een tabel zoals afgebeeld in afb 47.

3.4.4. Als de tonen over de tijd uitgezet zijn, worden timbres daar random over gedistribueerd. Voor dat doel moeten we binnen elk timbre een inventaris bijhouden van alle instrumenten die er in meespelen. Voor een strijkkwartet, en elke homogene groep timbres, is dat betrekkelijk simpel. Immers, elk timbre kan door elk instrument voortgebracht worden. De tabel bestaat daarom uit a) de timbreklassen (bv I,II,...VI) en b) de nummers van de instrumenten (1,2,3...). In elk segment is het aantal tonen, hun ritmiese positie en de percentages van elk timbre bekend. We weten dus hoeveel vertegenwoordigers van elk timbre aanwezig moeten zijn. We kunnen dan bv in een vaas ballen doen met zes verschillende kleuren en van iedere kleur (=timbre) de juiste hoeveelheid. Als we nu op iedere bal per timbre het nummer van het instrument zetten, kunnen we de ballen één voor één uit de vaas nemen, het timbre noteren en het instrument dat het speelt. We kunnen dit ook doen met behulp van tabellen met randomgetallen. Voorbeeld:

instrumenten						
4	7	0	16	10	4	13
3	6	1	16	10	4	13
2	7	0	16	10	4	13
1	6	1	16	10	4	13
	I	II	III	IV	V	VI
	timbres					
in %	13	1	32	20	8	26
totaal aantal:	26	2	64	40	16	52

(a)

1	20-26	-	77-92	123-132	145-148	188-200
2	14-19	28	61-76	113-122	141-144	175-187
3	7-13	-	45-60	103-112	137-140	162-174
4	1-6	27	29-44	93-102	133-136	149-161
	I	II	III	IV	V	VI

(b)

afb. 76

- de dichtheid D van segment a_i = 14 klanken/sec.
- de log van deze dichtheid is 4.94 (zie tabel afb 72)
- de percentages van de 6 timbres kunnen we nu 'aflezen' uit de tekening (c) afb 75

- de totale duur van het segment is bv 14.3 seconden. We hebben dus in totaal 14.3 x 14 = plm 200 klanken nodig. We kunnen dus de gevonden percentages met 2 vermenigvuldigen.
- We konstrueren nu een matrix (zie afb 76a) met van links naar rechts de timbres, en daaronder de percentages, gevonden in tekening (c) afb 75. Deze percentages worden vermenigvuldigd met 2 om in totaal 200 klanken te krijgen. In de matrix worden deze totalen 'eerlijk' verdeeld onder de 4 instrumenten. Ten behoeve van het gebruik van een random-tabel (of van de vaas met genummerde ballen) konstrueren we nu nog een matrix waarin al deze aantallen genummerd zijn van 1 tot 200 (zie matrix b). We kunnen nu een random-volgorde trekken.

NB. De matrixen gaan veel onregelmatiger vormen aannemen naarmate de samenstelling van ensembles heterogener is. In elk geval zullen de kolommen op de timbreklassen van veel uiteenlopender hoogte zijn.

3.4.5. Men zou kunnen denken dat de konstruktie van het toonhoogteveld aan de verdeling van timbres vooraf zou moeten gaan. Een van de zeer interessante probleemstellingen bij het komponeren is natuurlijk *de hierarchie van parameter-afhankelijkheid*: Hangen we de instrumentatie op aan de toonhoogten of omgekeerd? Laten we dichtheid afhangen van ritmiese eisen of omgekeerd? Wordt de kontoerwerking van segmenten bepaald door toonhoogte-/timbre-/dichtheidsprogramma's of omgekeerd? Etc.
Xenakis heeft in zijn ST-programma's gekozen voor toonhoogtebepaling als funktie van de instrumenten. In de vorige paragraaf werden alle timbres uitgezet over de ritmiese plaatsen per segment. Nu de volgorde van die timbres vaststaat, laat Xenakis elke toonhoogte bepalen door de omvang van het betreffende instrument en wel als volgt: instrument VI_2 speelt in segment a_i bv 20 klanken. Het toonhoogteveld van het gehele ensemble is onderverdeeld in kleine sekundes vanaf de laagste toon van het laagste, en de hoogste toon van het hoogste instrument. De omvang van instr. VI_2 is daar een fraktie van. Als we deze omvang aangeven met de letter a, kan de toonhoogtedistributie teruggebracht worden tot een intervalprobleem. Laat de eerste toon VI_2 random bepaald worden. Nu wordt elke volgende toonhoogte

gevonden door een interval te kiezen uit een verdeling van intervallen, en dit op te tellen of af te trekken (omhoog, resp. omlaag) bij de vorige toonhoogte. Deze intervallen volgen weer de verdeling die gegeven is in 3.3.8 en 3.4.1, met keuze-mogelijkheid uit een diskrete en kontinue verdeling, te weten

$$P(i) = \frac{2}{t}\left(\frac{t-i}{t+1}\right) \qquad \text{en} \qquad P(i) = \frac{2}{a}\left(1-\frac{i}{a}\right)di$$

waarin t = het aantal toonhoogten op het instrument, en

$a = (t-1)$ = de omvang van het instrument in kleine sekundes. Nu is dus elke toon h_u bepaald door zijn voorganger h_{u-1} volgens:

$$h_u = h_{u-1} \pm i$$

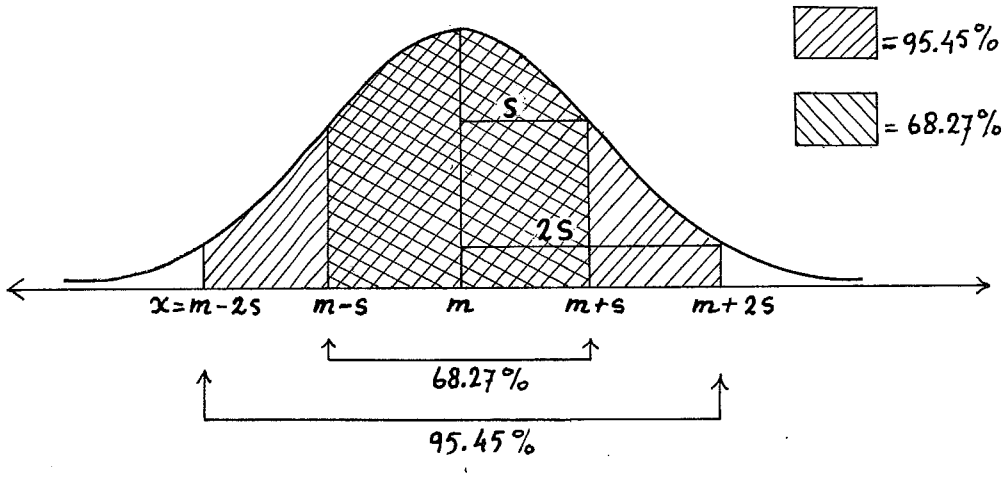
Voor elk instrument in elk segment apart moet op een dergelijke wijze het intervalverloop samengesteld worden. Dat betekent ook, dat t en a per instrument kunnen verschillen.[30)]

3.4.6. De verdeling van glissando-snelheden, voor zover *glissando* als timbreklasse in een werk is opgenomen, is weer als in Achorripsis (zie 3.3.6). De Gaussiese of Normale verdeling in zijn standaardvorm werd in 3.3.7 vergeleken met de (normale, maar niet in standaardvorm voorkomende) verdeling die Xenakis aan Lévy ontleende, en de Maxwell-Boltzmann verdeling. Aangezien wij menen dat de standaardverdeling de meest bruikbare is vanwege de gemakkelijke beschikbaarheid van tabellen voor de standaardmaat

$$z = \frac{x-m}{s}$$

zullen we hier, in afwijking van Xenakis, de voortzetting van zijn redeneringen ook aanpassen aan deze standaardmaat. We herinneren ons, dat z gebaseerd is op de standaardafwijking s, en de gemiddelde snelheid m. Om nu een gebied van snelheden af te bakenenwaarbinnen we kunnen kiezen, moeten we rekening houden met een maximaal mogelijke snelheid (die een strijker kan bereiken op zijn instrument - in veel gevallen zal deze max. snelheid afhankelijk zijn van het grootste strijkinstrument uit het ensemble!) en een minimumsnelheid die we wensen. Xenakis geeft een voorbeeld van 75 kleine sekundes/sec. als maximum. Om te weten hoe groot we m en s moeten kiezen, is het nodig

om nog de volgende eigenschap van de Normale verdeling te kennen. In afb 77 hebben we deze verdeling nog eens afgebeeld. De totale oppervlakte onder de 'klok' is 1, of 100%, zoals we weten. Met behulp van integratie kan berekend worden dat de oppervlakte onder de klok tussen $m-s$ en $m+s$ 68.27% bedraagt, en die tussen $m-2s$ en $m+2s$ 95.45%. Dat wil dus zeggen, dat, gegeven een bepaald gemiddelde m en uitgaande van een bijbehorende standaardafwijking s, ruim 68% van alle x in de verdeling groter zijn dan $m-s$ en kleiner dan $m+s$; en dat ruim 95% van alle x ligt tussen $m-2s$ en $m+2s$. Als ik er dus voor zorg dat $m+2s$ ongeveer gelijk is aan het maximum dat x mag bereiken, dan overschrijden we dit vastgestelde maximum slechts in 4.55% van de gevallen (We kunnen dan veiligheidshalve het maximum enigzins verlagen).



afb. 77

We hebben nu een lineair verband gekonstrueerd tussen m en s. Voorbeeld: stel dat we als maximum snelheid voor een glissando 24 kleine sekundes/sec. toelaten (met 4.5% kans dat het ietsje hoger wordt) dan luidt dit verband, voor positieve waarden van m en s:

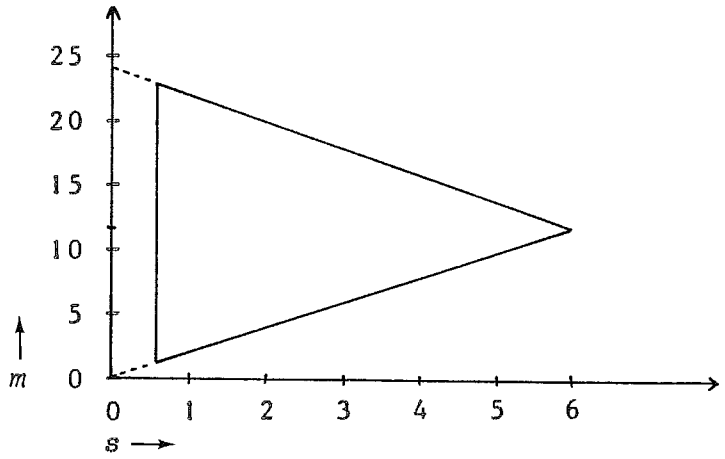
$$m + 2s \leqslant 24$$

en $$s \leqslant 12 - \tfrac{1}{2}m.$$

s	m	$m-2s$	$m+2s$
1	22	20	24
2	20	16	24
4	16	8	24
6	12	0	24
8	8	-	24
10	4	-	24

afb. 78

In de tabel van afb 78 kunnen we deze verbanden snel aflezen. We zien dat het maximum $x = m+2s = 24$ gehandhaafd blijft. Het minimum daarentegen bereikt bij $m=12$ en $s=6$ al de nul-grens, met uitsluiting van overschrijdingsmogelijkheid. We zien echter ook, dat, willen we per sé $m=8$ als gemiddelde snelheid niet uitsluiten, de standaardafwijking gewoon kleiner genomen moet worden. Met $s=4$ en $m=8$ zou $m-2s=0$. Maw. blijkbaar kan s alle waarden tussen 0 en 4 aannemen om nog steeds met $m=8$ te kunnen werken. (NB. een standaardafwijking $s=0$ komt natuurlijk nooit voor, tenzij men de vergelijking $f(x)=m$ als een(triviale)normale verdeling wenst te beschouwen). Omgekeerd geldt ook: bij gelijkblijvende standaardafwijking kan m meerdere waarden aannemen binnen bepaalde grenzen. Bv als ik $s=4$ stel, dan kan m varieren tussen 16 en 8. We kunnen nu voor alle s en m een grafiek tekenen waarin we de vasgestelde waarden tussen maximale snelheid $x=24$ en min. snelheid $x=0$ (voor het gemak) in acht nemen en uitdrukken in een relatie tussen s en m. (zie afb 79)



afb 79

Als we een minimale waarde $s=0.5$ toelaten, kunnen we zeggen dat alle paren (s,m) die toegestaan zijn, liggen in het gebied tussen de twee funkties f en g:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & f(s) = m = 24-2s \\ (2) & g(s) = m = 2s\end{array}\right\} H(s) = (2s \leqslant m \leqslant 24-2s)$$

of omgekeerd, tussen

$$\left.\begin{array}{ll}(3) & f(m) = s = 12-\tfrac{1}{2}m \\ (4) & g(m) = s = \tfrac{1}{2}m\end{array}\right\} H(m) = (\tfrac{1}{2}m \leqslant s \leqslant 12-\tfrac{1}{2}m)$$

In beide gevallen kan een funktie H voor de gehele oppervlakte tussen f en g worden gegeven.

Xenakis geeft nu 3 mogelijkheden om per segment een verdeling van glissando-snelheden vast te stellen:

i. een rechtevenredige koppeling tot stand brengen met de logaritmen van de dichtheden der segmenten;

ii. een zelfde koppeling, maar omgekeerd evenredig;

iii. een onafhankelijke verdeling maken.

De beide eerste koppelingen betekenen, in gewone termen, dat de glissando-snelheid resp. gelijk opgaat met toe- en afname van de logaritmiese dichtheid, dan wel precies tegen de draad van dichtheidsveranderingen ingaat. Aangezien bij Xenakis van meet af aan een (lineair) verband is aangenomen tussen gemiddelde snelheid en standaardafwijking (die vermoedelijk samenhangt met de gastheorie zoals die bij Lévy behandeld is) kan hij de koppeling beperken tot een tussen de gemiddelde snelheid en de logaritme van de dichtheid. (In zijn geval tussen het kwadraties gemiddelde en $\log_e$ van de dichtheid).

Wij kunnen van te voren ook een dergelijk verband tussen *m* en *s* vasstellen, maar het is goed om te beseffen dat er verschillende mogelijkheden zijn. In afb 80 is een overzicht te zien van de voornaamste koppelingen uit de eerste kategorie, de rechtevenredige. Een korte uitleg:

Ia - Bovenaan staat de logaritme-schaal van de dichtheden per segment, zoals vastgesteld in 3.4.1. Dezeis natuurlijk in feite kontinu van 0 tot 7 (zie afb 69). Daaronder volgt eerst een koppeling met de gemiddelde snelheid *m*, en wel oplopend van 1 naar 23 (kleine sekundes/sec.) in de tijd dat log n/k oploopt van 0 tot 7. In beide domeinen zijn dit de extremen. Nu is *s* ondergeschikt aan *m*, en kan twee uiterste waardeveranderingen doorlopen, afhankelijk van de grafiek in afb 79, te weten

s_{1a} - van 0.5 naar 6 kl.sek/sec. (waar *m*=12) en weer terug naar 0.5 (waar *m*=23)

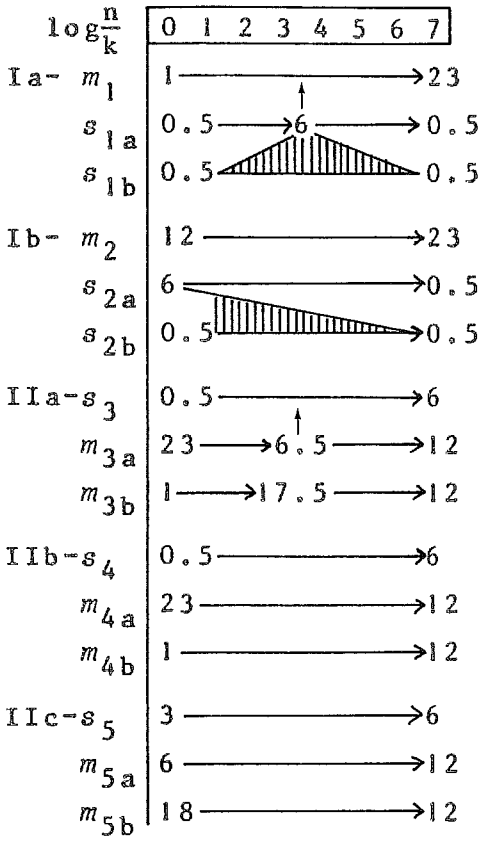
s_{1b} - de waarde 0.5 behoudend over de gehele linie.

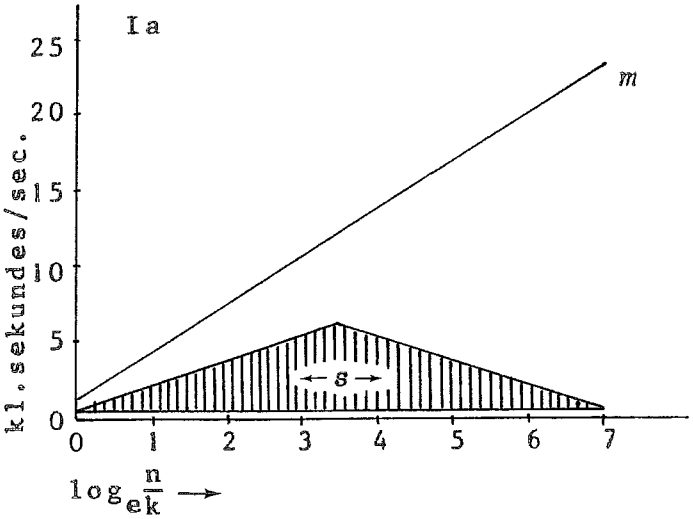
In de grafiek wordt dit geillustreerd. Merk op dat *s* alle waarden kan aannemen in het gearceerde gebied, maw. er zijn nog legio andere relaties mogelijk tussen *m* en *s* bij deze eerste koppeling van *m* met $\log\frac{n}{k}$.

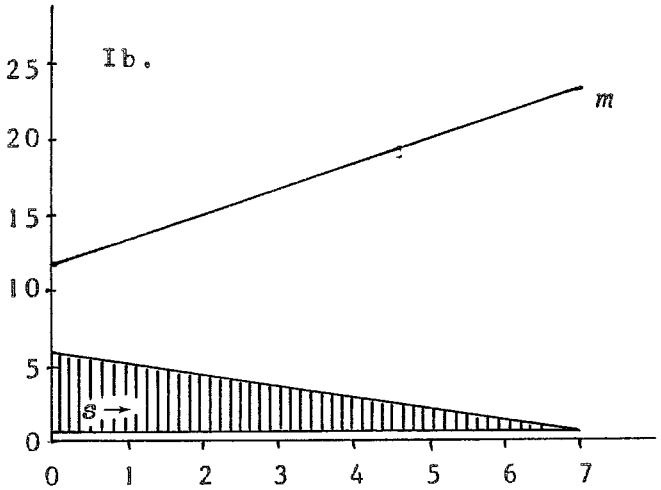
Ib - Nogmaals *m* met $\log\frac{n}{K}$ en wederom *s* als ondergeschikte aan *m*. We zien echter dat deze koppeling een essentieel andere konsekwentie voor *s* heeft.

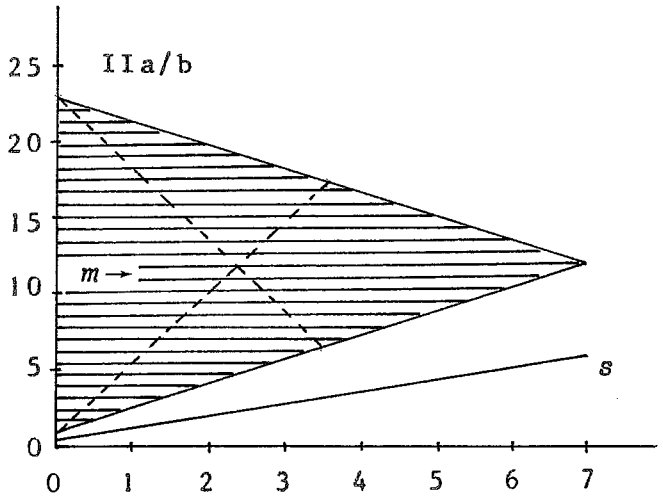
IIa en b - Nu heeft de standaardafwijking eerste keus en is *m* ondergeschikt. De stippellijn in de grafiek geeft de extreemste uitslag die *m* kan maken, weer (IIa). Nu kan *m* alle waarden aannemen in het gearceerde gebied bij lineaire koppeling tussen *s* en $\log\frac{n}{k}$.

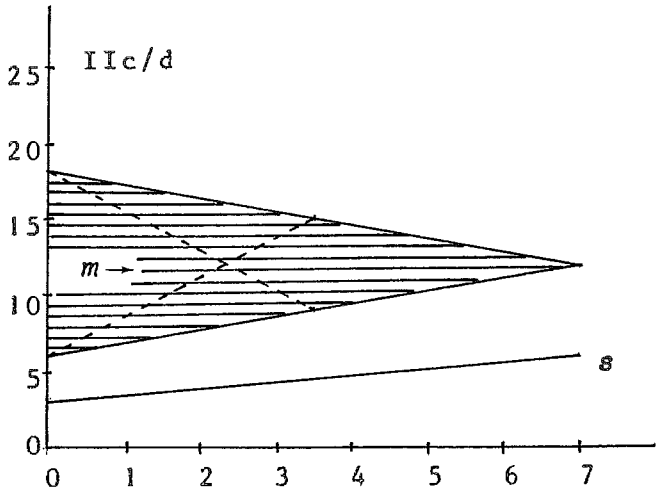
IIc(en d) - Een demonstratie van wat er gebeurt als *s* niet op zijn minimum, maar bv op 3 begint. We zien nu dat het *m*-gebied 'krimpt'.


log n/k
0 1 2 3 4 5 6 7
Ia- m1
s1a
s1b
Ib- m2
s2a
s2b
IIa-s3
m3a
m3b
IIb-s4
m4a
m4b
IIc-s5
m5a
m5b
1 → 23
0.5 → 6 → 0.5
0.5 → 0.5
12 → 23
6 → 0.5
0.5 → 0.5
0.5 → 6
23 → 6.5 → 12
1 → 17.5 → 12
0.5 → 6
23 → 12
1 → 12
3 → 6
6 → 12
18 → 12


Ia
m
s
kl.sekundes/sec.
log n/ek →
0 1 2 3 4 5 6 7
0 5 10 15 20 25


Ib.
m
s
0 1 2 3 4 5 6 7
0 5 10 15 20 25


IIa/b
m
s
0 1 2 3 4 5 6 7
0 5 10 15 20 25


IIc/d
m
s
0 1 2 3 4 5 6 7
0 5 10 15 20 25

afb. 80

3.4.7. Hoe lang duurt elke klank?

Xenakis gaat allereerst uit van een maximumduur per klank, die vastgesteld wordt voor een bepaald stuk. Dit maximum is uiteraard zeer afhankelijk van de instrumenten die meespelen, bv de lengte van de adem voor een blazer. Om de berekeningen niet al te ingewikkeld te maken, laat hij bij de vaststelling van dit maximum voorlopig de ligging en speelmanieren terzijde en behoudt zich het recht voor om bij het overschrijven van de berekeningen in gewoon notenschrift veranderingen aan te brengen als iets onmogelijk/onspeelbaar is op een instrument.

Noem deze maximumduur G. De minimumduur is vanzelfsprekend een staccato-toon, die we op 0 (nul) zullen stellen.

Nu maken we ons een voorstelling van een mogelijke verdeling van duren in een bepaald segment. Het spreekt vanzelf dat, gegeven een ensemble met een bepaald aantal instrumenten, als vuistregel geldt, dat de duur van tonen omgekeerd evenredig zal (moeten) zijn met de dichtheid. Als we nu 'totale onafhankelijkheid' wensen, zoals stochastiese verdelingen eigen zijn, is de verdeling van duren Gaussies, volgens Xenakis. Dus moeten we wederom een gemiddelde en een standaardafwijking bepalen, en kunnen daarom ook weer een koppeling tot stand brengen tussen deze twee parameters en de dichtheid. Aangezien dichtheid niet de enige beperkende faktor is, maar ook de frekwentie van elk afzonderlijk instrument, en daarmee de betreffende timbre-klasse, moet die koppeling met alle drie faktoren tegelijk gemaakt worden. We hebben tot zover:

G = een of andere vastgestelde max. duur.

D_{a_i} = dichtheid van segment a_i (dus niet log dichtheid!)

q_r = percentage deelname van timbreklasse r.

p_n = percentage deelname van instrument n, binnen die klasse.

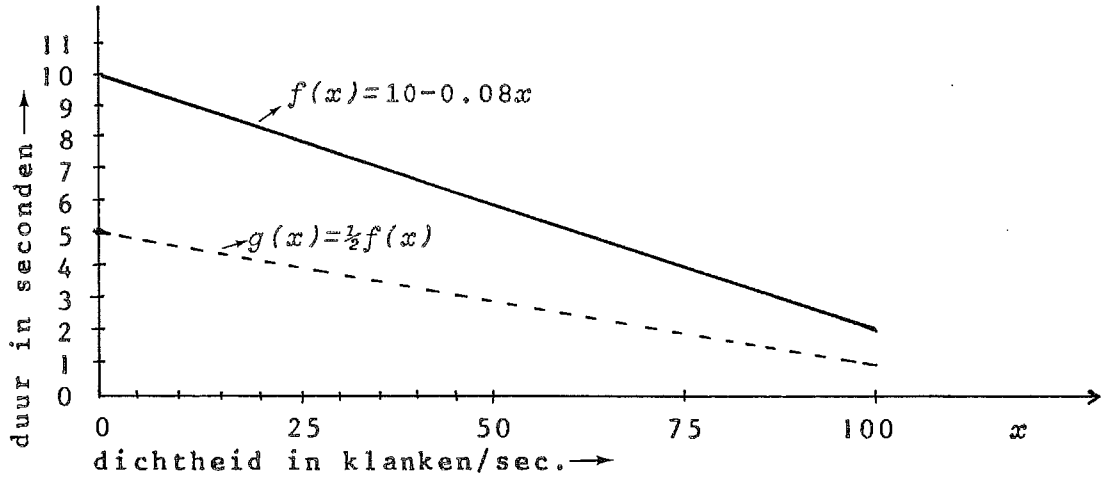
Als we de koppeling van duur met D_{a_i}, q_r en p_n nu u noemen, dan kunnen we de omgekeerde evenredigheid uitdrukken via:

$$u = \frac{1}{D_{a_i} q_r p_n}$$

Deze uitdrukking komt er in feite op neer dat de koppeling geheel toegespitst is op het individuele instrument.

We kunnen nu natuurlijk regelingen treffen voor elk instrument apart over alle segmenten van een stuk. Voor het gemak van de

behandeling van deze komplexe arbeid gaan we nu maar uit van een uniforme regeling voor alle instrumenten. Stel dat we van deze twee uitersten uitgaan: als de dichtheid minimaal is, en we dus de langste tonen kunnen hebben, willen we een globale maximum duur van 10 seconden; als we maximale dichtheid hebben, willen we een globale maximum duur van 2 seconden.
Onze eerste stap is nu een verband vast te stellen tussen alle waarden die het dichtheidsgebied kan aannemen en het gebied van de maximum duren. Een eerste mogelijkheid is een lineair verband. Als we de dichtheden uit 3.4.1 ongeveer aanhouden, hebben we dus dichtheidsfluktuaties tussen 0.1 tot ongeveer 100 klanken per seconde. Als we nu een grafiek tekenen met op de horizontale as de dichtheden, en vertikaal de duur in seconden, kunnen we een lijn trekken zoals afgebeeld in afb 81.



afb. 81

De vergelijking voor een lineaire funktie is

$$f(x) = px+q$$

We weten twee waarden namelijk $x=0$ dan $f(x)=10$ en
$x=100$ dan $f(x)=2$.

Na substitutie wordt de vergelijking

$$f(x) = 10 - 0.08x$$

Als we voortdurend een ondergrens van $f(x)=0$ willen handhaven, dwz als we willen dat in alle segmenten een (kleine) kans moet bestaan dat de minimum duur (een staccato-klank) voorkomt, kunnen we dus onmiddellijk een lijn trekken die de gemiddelde duren uitdrukt, nl.

$$g(x) = \tfrac{1}{2}f(x) = 5 - 0.04x$$

Stel nu, dat we de uiterste waarden die om deze gemiddelde waar-

den heen liggen, vereenzelvigen met $2s$, dat is twee maal de standaardafwijking, dan kunnen we die in alle gevallen uitrekenen, immers nu geldt:

$$f(x) - g(x) = 2s$$

dus $$s = 2.5 - 0.02x \text{ voor alle } x.$$

NB. We nemen er dus genoegen mee (en hebben daar, als het goed is, onze maxima $f(x)$ op afgestemd) dat in alle gevallen ongeveer 4.5% van de duren de maxima nog overschrijden, en ook de minima! Het overschrijden van het minimum kan opgevangen worden door deze waarden gewoon tot nul te verklaren. Willen we dat voorkomen, dan moeten we s kleiner nemen (zoals Xenakis gedaan heeft) door bv te stellen dat

$$f(x) - g(x) = 4.25s$$

waaruit $$s = \frac{5 - 0.04x}{4.25} \doteq 1.18 - 0.009x$$

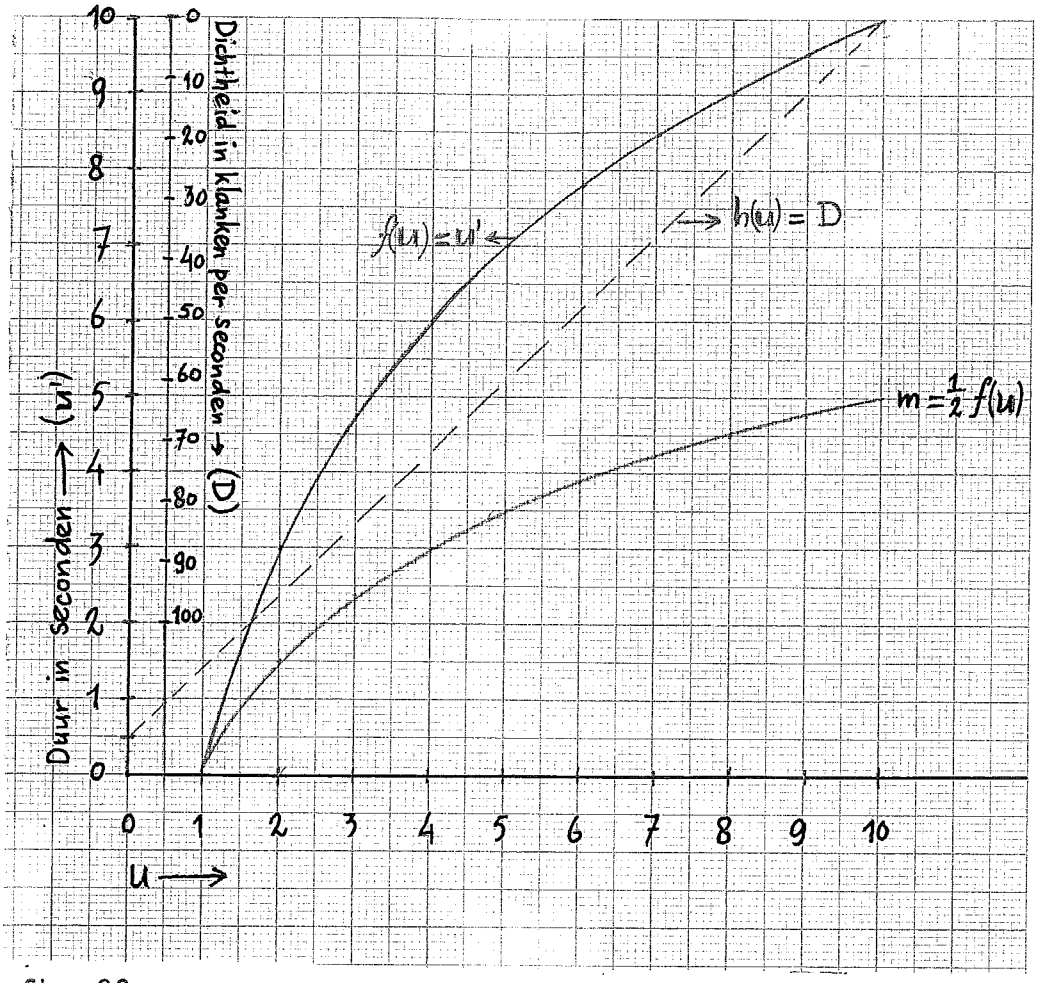
Het percentage afwijkingen dat in de Normale verdeling $4.25s$ van het gemiddelde af ligt, is vrijwel verwaarloosbaar. Bij verzamelingen met beperkt aantal elementen kan dus in het algemeen volstaan worden met een uitslag van $2s$ tot $2.5s$.
Met deze gegevens kunnen we z weer berekenen (zoals in 3.3.6 en 3.3.7):

$$z = \frac{y-m}{s} \qquad (y \text{ is hier duur!})$$

en met behulp van de daarvoor beschikbare tabellen de percentages vaststellen bij variabele y. Als we alle instrumenten per segment op één lijn stellen, dan kunnen we één verdeling van duren konstrueren die voor de totale voorraad klanken in dat segment geldt. We kunnen daarentegen ook verdelingen per instrument maken, vooral noodzakelijk als we die uniformiteit van instrumentale bezetting niet kunnen handhaven, en genoodzaakt zijn meerdere funkties $f_i(x)$ te maken waarin i=1,2,3... staat voor elk instrument apart. In de kleinere ensembles zal dit bijna altijd nodig zijn.

Een andere dan lineaire koppeling tussen duur en dichtheid is mogelijk. Xenakis heeft gebruik gemaakt van een logaritmiese progressie, omgekeerd evenredig met de dichtheden. Voor dat doel kreëerde hij een parameter, die we υ zullen noemen (om verwarring te voorkomen met z, de term die Xenakis er in FM p. 141 voor gebruikt, maar die bij ons steeds als standaardmaat bij de Normale verdeling toegepast wordt) en die we al gebruik-

ten als uitdrukking voor de omgekeerde evenredigheid van duur staat tot dichtheid x timbreklasse x instrument. ($D_{a_i} x q_r x p_n$)



afb. 82

- Stel dat we als max. duur 10 seconden toelaten.
- Stel bovendien dat we in alle gevallen als ondergrens 0 sec. (staccato) willen behouden.
- Dan is $G = U_{max}$ = het absolute maximum = 10.
- We noemen nu het variabele maximum, dat als funktie van dichtheid gedefinieerd is, U'.
- Willen we nu zorgen dat U' logaritmies toeneemt, dan maken we dus een funktie $f(U)$ die als volgt gedefinieerd is:

$$f(U) = G\frac{\log U}{\log G} \qquad (1)$$

Met onze gegevens: $f(U) = 10\frac{\log U}{2.303} \doteq 4.34 \log U$ (2)

(NB. $\log = \log_e$, de natuurlijke logaritme met basis e)

In plaats van een rechte lijn (zoals in afb 81) krijgen we nu een gebogen kurve, die naar rechts (grotere U) steeds minder snel

toeneemt. Met de woorden van Xenakis:"om de groei van υ te bevriezen". (zie afb 82) Omdat we afgesproken hebben het minimum altijd 0 te laten, kunnen we weer een funktie g konstrueren, die in alle gevallen de gemiddelde duur geeft:

$$g(\upsilon) = \tfrac{1}{2}f(\upsilon) \qquad (3)$$

De koppeling van deze getransformeerde υ met dichtheid kunnen we naar believen inrichten. Als we weer, zoals bij onze lineaire koppeling hierboven, bij dichtheid $D_{a_i}=100$ een max. duur $\upsilon'=2$ willen, kunnen we eenvoudig een schaal van 0 tot 100 langs de vertikale ordinaat plaatsen: we leggen een lineair verband tussen logaritmiese duur υ' en dichtheid D.

- Als D=100 willen we $\upsilon'=2$
- Als D=0 willen we $\upsilon'=10$
- Daartussen willen we de logaritmiese progressie ('bevriezing') van υ'.
- We moeten daarom υ kunnen uitrekenen bij iedere D, want vanuit υ berekenen we υ'.

Dat gaat als volgt:

- We rekenen uit wat υ voor waarde heeft als $\upsilon'=2$, en als $\upsilon'=10$

$\upsilon'=f(\upsilon)=4.34\log\upsilon$ (zie (2))

Voor $\upsilon'=2$ is $\upsilon=e^{2/4.34}\doteq 1.58$ (definitie natuurl. log.)

Voor $\upsilon'=10$ moet $\upsilon=10$.

- we maken nu de funktie $D = h(\upsilon) = p\upsilon+q$.

Voor D=100 weten we al dat $\upsilon\doteq 1.58$ (want $\upsilon'\doteq 2$)

Voor D=0 weten we ook dat $\upsilon=10$ (want $\upsilon'=10$)

Twee vergelijkingen met twee onbekenden. Resultaat:

$p\doteq -11.88$ en $q=118.8$, dus

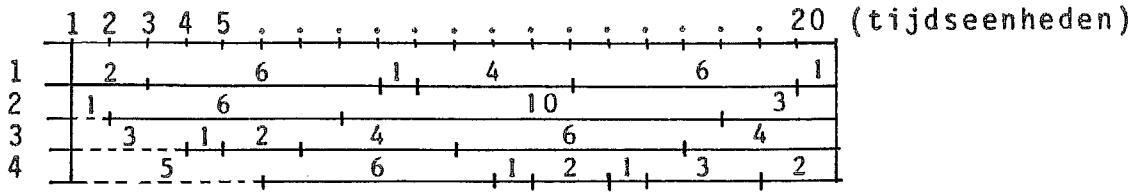
$$D = h(\upsilon) = 118.8 - 11.88\upsilon \qquad (4)$$

$$\upsilon = \frac{118.8 - D}{11.88} \qquad (5)$$

zodat we nu bij elke D de bijbehorende υ kunnen berekenen, en van daaruit υ'. In afb 82 staan beide funkties door elkaar getekend.

Daarna gaan we weer op precies dezelfde wijze te werk als we deden met $f(x)$ en $g(x)$ om de Normale verdeling te konstrueren. We substitueren eenvoudig $f(\upsilon)$ voor $f(x)$, en $g(\upsilon)$ voor $g(x)$, berekenen dan s en vervolgens z.

Overigens zal in de praktijk blijken dat de distributie van de duren over de afzonderlijke instrumenten vaak niet gemakkelijk is. We zitten, in de volgorde van bewerkingen zoals die hier is aangehouden van 3.4.0 tot 3.4.7, al vast aan een ritme (tijdsintervallen) met vaste plaatsen voor elk instrument. Voor een ensemble met 4 instrumenten ziet dat er schematies ongeveer als volgt uit:



afb. 83

We zien daarin dat het totaal aan beschikbare duren

$$4 \times 20 - (1+3+5) = 71$$

tijdseenheden is. Dit moet worden opgedeeld over 20 plaatsen. De gemiddelde duur is dus $\frac{71}{20} = 3.55$. Het absolute maximum is 10, en kan maar één keer gebruikt worden (in instrument 2). Alle andere duren liggen daar ver onder. We kunnen daarom beter als max. duur 6 aanhouden, bij een gemiddelde van 3.55. Als we een goede planning gemaakt hebben zal voor dit schematiese muziekfragment van te voren een maximale duur vastgesteld zijn (op grond van de gemiddelde dichtheid) die goed afgestemd is op de verdeling van de tijdsintervallen over de instrumenten. Als dit fragment niet voor honderd procent legato wordt gespeeld (= max. duur) zullen het gemiddelde en de max. duur lager zijn, bv $m=2.5$

en $m+2s=5$.

Het wordt aan de lezer overgelaten het probleem van de duren ook even goed vanuit dit standpunt te bestuderen. Een van de oplossingen die van daaruit denkbaar zijn, is een *verdeling van percentages* <u>*rust*</u> te maken, met een gemiddeld percentage als leidraad voor een heel segment.

Als men niet gebonden is aan een van te voren vaststaande hoeveelheid instrumenten (bv in elektroniese muziek), speelt dit probleem natuurlijk geen rol en kan zelfs een maximum duur ingelast worden die groter is dan de in dit schema beschikbare tijdsruimte vereist.

Een tweede alternatief is het probleem te bekijken vanuit de

gemiddelde hoeveelheid stemmen die tegelijk mogen klinken = de gemiddelde vertikale dichtheid. Dit standpunt is natuurlijk verwant aan ons vorige alternatief.

3.4.8. Voor de verdeling van de sterktegraden Gaat Xenakis uit van 4 hoofd-sterktegraden: *ppp*, *p*, *f* en *ff*. Hiermee kunnen 44 verschillende typen gekonstrueerd worden als je uitgaat van een beginsterkte, middensterkte en eindsterkte:

ppp → *ppp* → *ppp*	wordt	*ppp* ——— *ppp*
ppp → *ppp* → *p*	wordt	*ppp* ◸ *p*
ppp → *p* → *ppp*	wordt	*ppp* < *p* > *ppp*
...	...	...
ff → *p* → *f*	wordt	*ff* > *p* < *f*

etc.

Als je op deze manier alle kombinaties van drie sterktegraden afwerkt, krijg je 4^3=64 permutaties. Er zijn er echter een aantal onder die identiek zijn bv

ppp → *ppp* → *p* *ppp* → *p* → *p*.

Na deze eruit verwijderd te hebben blijven er nog 44 (van elkaar verschillende) over. Elke verzameling sterktegraden kan hier natuurlijk dienst doen. Deze wordt immers random verdeeld over alle tonen van een segment. Xenakis is echter wat sumier in zijn aanpak van het dynamiese niveau. Men zou zich een veel gedifferentieerder verdeling van sterktegraden kunnen voorstellen over een heel werk, met bv opnieuw een koppeling tussen gemiddelde sterkte en dichtheid. Maar ook zonder koppeling kan een verdeling van *mengsels* gemaakt worden. Deze mengsels kunnen van zeer verschillende samenstelling zijn, afhankelijk van de klassifikaties die men aanbrengt binnen een verzameling van mogelijke vormen. De brute aanpak van Xenakis op deze plaats lijkt erg veel op de uiterst globale behandeling die deze variabele onderging in het geval van Achorripsis. Overigens moeten we bedenken dat niet zonder meer elk dynamies 'mengsel' in de praktijk (van het luisteren - het akoesties effekt) even adekwaat is: de zachtere bestanddelen worden in heel veel omstandigheden helemaal weggedrukt door de hardere, maw. de gedifferentieerdheid van het 'papieren mengsel' staat heel vaak in geen verhouding tot het klankresuktaat. Zeer veel parameters

zijn voor wat betreft de duidelijkheid van hun samenstelling en ontwikkeling in hoge mate afhankelijk van een uiterst conscientieuze sterktegraads-dosering. Het is daarom de vraag in wat voor omstandigheden een randomverdeling van sterktegraden het meest adekwaat is. Daarbij spelen zeker ook de gehoors-eigenschappen, zoals die in het Fletcher-Munson diagram (van sterktegraads-kontoeren in relatie tot toonhoogte) weergegeven zijn, een rol. En dan spreken we nog in 't geheel niet over de psychologiese aspekten die in de waarneming van muzikale strukturen een rol spelen en die in dit boek ternauwernood aan de orde komen. (Een grove schets volgt in het laatste hoofdstuk).

3.4.9. Dit zijn alle berekeningstypen die aan de konstruktie van de ST-familie ten grondslag liggen. Ten opzichte van Achorripsis is het wel wat ingewikkelder geworden, maar we zien ook in dat het principe niet veranderd is: De STOCHASTIESE muziek is een STATISTIESE muziek, dwz een muziek van VERDELINGEN IN DE TIJD. Binnen elke verdeling is de distributie van alle afzonderlijke gebeurtenissen RANDOM. De berekeningen zijn zó geformuleerd, dat een vertaling ervan in computertaal (bv Fortran, zoals Xenakis heeft gedaan) voor de programmeur een betrekkelijk simpele opgave is. Dat wij daar niet nader op ingaan, hebben we beargumenteerd aan het begin van dit hoofdstuk.

NOTEN

1) Deze begrippen worden in de komende hoofdstukken uitvoerig behandeld en gedefinieerd.

2) Alegebra-buiten-de-tijd en Algebra-in-de-tijd (resp. hors-temps en en-temps):als bij noot 1. Voor korte samenvatting zie woordenlijst.

3) Wil men het cycliese karakter van de majeurladder in de getallen tot uitdrukking brengen, dan moet de set van definities uitgebreid worden tot een cycliese funktie ontstaat, bv als volgt

$x = \ldots.5, 6, 0, 1, 2\ldots..6,.0, 1,\ldots$

$f(x)=y = \ldots.A, B, C, D, E\ldots..B, C, D,\ldots$

Een andere mogelijkheid is, gebruik te maken van de restklassebeschrijving (zie 2.1.0 e.v.)
Door haar cycliese karakter kan de ladder ook als een Groep beschreven worden, hetgeen in feite door de hierboven gegeven funktie omschrijving al enigzins te zien is. Ook over Groepen zal in komende hoofdstukken uitvoerig geschreven worden.

4) Zie vooral voetnoot 5.
Het woord *samenklank* en *harmoniese analyse* duiken bij Xenakis voor het eerst op in plm 1970 (als hoofdstuk IX uit FM tenminste uit die tijd dateert). Vanaf de eerste komposities van Xenakis is samenklank door hem waarschijnlijk altijd opgevat als *makro-struktureel timbre*. De grote makro-strukturele toonhoogte processen (zoals de stochastiese en Markovketens, maar ook de toonhoogtebewegingen over de roosters die met behulp van restklasse algebra gemaakt zijn) hebben eigenlijk het begrip samenklank in zijn traditionele betekenis (dissonantie, konsonantie, akkordverbindingen etc) geheel vervangen, zo niet onbruikbaar gemaakt. Er is een geheel nieuw konsept 'samenklank' ontstaan, dat nauw verwant is met timbre, timbrefluktuaties, mengsels e.d. (vgl Edgard Varèse)

5) Xenakis heeft bv de timbrekomponent uit de vektor weggelaten, om redenen genoemd in 1.2.0, waar timbre (geluid in zijn algemeenheid) analyties gezien herleid kan worden tot twee komponenten: toonhoogte(n) gekombineerd met sterktegraden (dynamiese vormen), resulterend in toonhoogte-patronen (spektra) en daaraan gekoppelde dynamiese spektra. De komponent duur is dan alweer een aspekt in de temporele struktuur (zie ook noot 7). *"Elke klankgebeurtenis wordt waargenomen als een verzameling eigenschappen die gedurende zijn optreden aan veranderingen onderhevig zijn"* (FM p. 157). Theoreties kan derhalve het analyties standpunt wel enige tijd van dienst zijn, maar Xenakis is er in zijn "New Proposals in Microsound Structure" (FM p. 242 e.v.) al weer als de kippen bij wanneer het erom gaat praktiese oplossingen voor praktiese problemen en toepassingen te vinden:de werkelijke spektrale zowel als informatie-theoretiese analyses van geluid wijzen niet alleen op de enorme vertikale komplexiteit van bv de klanken van gewone orkestinstrumenten, maar ook op de enorme horizontale fluktuaties daarin tijdens het voortklinken. Patroonherkenning in psycho-akoestiese en informatie-theoretiese zin is gebaseerd op totaal andere premissen over de werkelijkheid van de waarneming dan de enorme arbeidsintensieve elektro-mechanies-dynamies-magnetiese machine-

handelingen die nodig zijn om die werkelijkheid zowel te analyseren als na te bootsen. Een 'realistiese aanpak', dwz die bruikbaar en toepasbaar is, gaat uit van operaties op komplexere geluiden, eventueel zelfs van ruistypen, in elk geval van geluidstypen die op intuitievere wijze geklassificeerd kunnen worden met het blote OOR als kriterium... 'klanksynthese' vanuit'konkreet' geluid dus (cf I.4.0 e.v.)

6) Deze notatie is niet van Xenakis. Bij hem vinden we:

$$a \; T \; b \neq b \; T \; a$$

7) Althans, dat is mijn persoonlijke visie op Xenakis' gebruik van de term *metriese tijd* in dit verband. En dan ga ik uit van de vraag, wat het nut van deze konstatering kan zijn. Deze term en de uitdrukking *temporele strukturen* (of temporele algebra) interfereren soms op enigzins onduidelijke wijze in het woordgebruik van Xenakis.

8) a. Xenakis ziet even af van de eigenschap die toonhoogte onderscheidt van de beide andere komponenten:de frekwentieverhoudingen. Als we van twee sinustonen, die op dezelfde toonhoogte starten, de één geleidelijk omhoog laten gaan en de andere laten staan, 'passeren' we een oneindige hoeveelheid frekwentie verhoudingen p/q, waaronder met name enkele die, gereduceerd tot relatief priem, opvallen door grote 'konsonantie' (zoals kwart, kwint, en vooral oktaaf), in casu doordat $p + q =$ zeer klein (p en q hele getallen). Daardoor ontstaat, bij oneindig verder van elkaar af glijden, een bepaalde periodiciteit in het interferentieverloop, die het oor nu eenmaal registreert!

b. Deze periodiciteit is enigzins te vergelijken met die, welke ontstaat bij *tijdsinterval*veranderingen. Neem twee intervallen a en b. Interval a blijft konstant en b gaat 'groeien' vanaf a. We 'passeren' dan wederom een aantal *verhoudingen* die in het domein van het oude konsept *metrum* specifieke betekenis hebben. Als a=1 sec. = 1, en a staat voortdurend met deze eenheidslengte ter beschikking van een permanent veranderende b, dwz wordt voortdurend met elke nieuwe duur $b_j > b_i$ vergeleken, ontstaan de volgende breuken:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1+k}, \frac{1}{1+m} \quad \ldots \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2+k}, \frac{1}{2+m} \quad \ldots \quad \frac{1}{3} \quad \ldots \quad \frac{1}{4} \quad \ldots$$

waarin k en m < 1,
en k < m.

Het feit nu, dat we bij toonhoogte niet alleen - en in sommige gevallen zelfs in 't geheel niet - in termen van interval*grootte* denken, maar ook in termen van interval*soort*, zou de axiomatiek van toonhoogte-intervallen moeten onderscheiden van die van duur.

M.a.w. het toonhoogte-intervalveld en het tijdsintervalveld zijn niet alleen interval*grootte*-velden, zijn dus niet zonder meer 'kontinu' meetbaar.

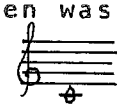
(de 'ommissie' is wederom karakteristiek voor Xenakis' benadering van het samenklank probleem - zie noot 4.)

c. Het geluidssterkte-interval is naar mijn mening wél kontinu meetbaar. Ik geloof dat we geen waarnemingen doen in de trant van:geluid a is tweemaal zo hard als geluid b. De proefsituatie zou er weer als volgt uitzien:Neem twee geluiden a en b. Laat a vaststaan op één geluidsterkte en laat b toenemen. (eventueel voortdurend afwisselend a en b om wederzijdse bein-

vloeding te voorkomen) terwijl de logaritmiese dB-schaal de verhoudingen weergeeft. De proefpersoon moet nu uitspraken doen. Etc. Mijn hypothese is, dat we alleen globale en relatieve waarnemingen doen op het niveau van de sterkte (vgl GAGNE 1975 p. 102 fig. 4)

9) Zie met name ALEXANDROFF (Parijs 1965) "Introduction à la théorie des Groupes".

10) Naar mijn mening kleven er nog wel wat schoonheidsfoutjes aan dit systeem. De drie komponenten van de vektor zijn in de werkelijkheid (de fysiologiese werkelijkheid) niet eksakt van dezelfde aard. (zie ook noot 8) Onder andere is de bepaling van een nul op de schaal van elke komponent dubieus. In de voorbeelden die we gegeven hebben was de nul resp.

voor toonhoogte  met de kl. sekunde = schaaleenheid.

voor sterkte 50 dB met 10 dB = schaaleenheid;

voor duur 10 sec. met 1 sec. = schaaleenheid.

(NB. schaaleenheden kunnen altijd veranderd worden en hebben geen enkele invloed op de argumenten).
De positie van de 0 in het toonhoogtegebied veroorzaakt een opdeling (een snede) van dit gebied in een gedeelte dat naar oneindig hoog en oneindig laag loopt, los van de hoorbaarheidsgrenzen. M.a.w. het domein van de toonhoogte frekwenties is dat van de reele getallen van $-\infty$ tot ∞.
Dat is niet het geval met duur en sterkte, want beide komponenten hebben een domein dat aan de onderkant begrensd is (er is een absolute 0, nl geen geluidssterkte dwz energie = 0 = 0 dB, en duur = 0 dwz geen duur), eveneens onafhankelijk van hoorbaarheidskriteria. Naar de bovenkant kunnen beide komponenten theoreties oneindig toenemen, m.a.w. hun domein is dat van de positieve reele getallen: $0 < \text{dom} < \infty$, het open interval tussen 0 en oneindig.
Er is m.a.w. niet alleen onderscheid tussen hoorbaarheids- en fysiologiese grenzen, maar ook tussen de fysiologiese grenzen onderling. De karakteristieke eigenschappen per domein (zie ook noot 8) moeten nauwkeurig in rekening gebracht worden bij een formalisatie, omdat deze van invloed zijn op de rekenkundige operaties die erop uitgevoerd worden.

11) Srtukturen-buiten-de-tijd en strukturen-in-de-tijd heten in de franse uitgave "structures hors-temps" en "structures en-temps".

12) Zijn kompositie MIKKA voor vioolsolo is geinspireerd op dergelijke zgn pressure-curves.

13) Xenakis-Festival Middelburg, zomer 1976. De diskussie (het interview) werd door mij geleid.

14) Zie o.a. Philips Technies Tijdschrift no 5, 1958.

15) Hetgeen neer zou komen op een zeer ingewikkeld beslissingsprotokol: bij het plaatsen van elk volgend pizzicato ziet de komponist zich geplaatst voor een grote verzameling alternatieven die allemaal bepaalde overwegingen (theorien) wakker roepen en waard zijn. Deze moeten tegen elkaar afgewogen worden (waaruit weer nieuwe theorien ontstaan, enzovoort) zodat, bij gebrek aan een duidelijke beslissingsstrategie (in casu afbakening van het

aantal mogelijke theorien en de aanwezigheid van een set kriteria om ze tegen elkaar af te wegen in elke voorkomende situatie) een escalatie van onzekerkeid ontstaat die tenslotte elke beslissing onmogelijk maakt en nog maar één strategie toelaat: willekeur. De oplossing die Xenakis nu kiest gaat uit van die fundamentele willekeur (toeval) en zoekt van daaruit naar organiserende principes → regulerende mechanismen → beperkende faktoren → de theorien van het toeval (chance): Statistiek en Waarschijnlijkheidsleer. Het is goed deze wetenschap ook te plaatsen in het perspektief van de mentale processen waarmee verschijnselen worden bestudeerd: het zijn niet in eerste instantie de verschijnselen zelf die statistiese of probabilistiese eigenschappen bezitten; het zijn vooral ons waarnemingsmechanisme, onze methode van onderzoek, eventueel onze produktiemethode, die zich bedienen van dergelijke konsepten waar andere, meer deterministiese, ontoereikend blijken (of *voorlopig* te kort schieten).

16) Periodiciteit van de eerste orde is van de vorm

a a a a . . .

Periodiciteit van de tweede orde:

a b a b a b . . .

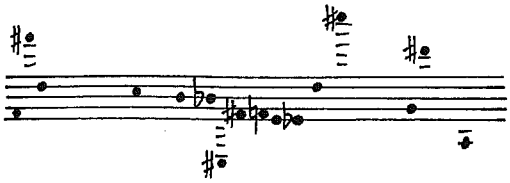
etc. De uitdrukking is voor de gelegenheid geintroduceerd.

17) De kompositoriese *praktijk* kan hier begrepen worden als de oplossing van problemen in *eindige* ruimten en *eindige* reeksen, waarin meestal geen infinitesimaalrekening aan de orde is.

18) Tabellen met randomgetallen worden vaak afgedrukt in boeken over statistiek en speltheorie. Een dergelijke tabel vinden we in "A Million Random Digits", the RAND corporation, Free Press, Glencoe 1955. In ons boek is zo'n tabel afgedrukt in Appendix 2.

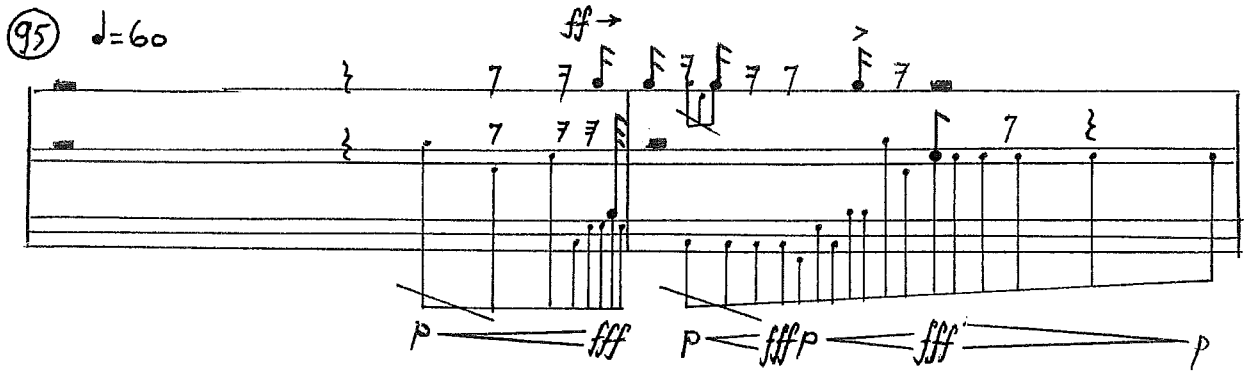
19) Een zeer interessant betoog over de konstruktie van randomreeksen is te vinden in "The Logic of Scientific Discovery" van Karl Popper, Hutchinson & Co Ltd, London 1972.

20) In de 'proportionele' notatie worden de noten of klanktekens op onderling relatieve afstanden geplaatst met een kontinue tijdsas als uitgangspunt, waarop een konstante eenheid (bv de seconde) als markering van de tijd dient. Deze wordt door sommige komponisten ook nog weggelaten, zodat de schattingen nog ruwer worden en de onnauwkeurigheid toeneemt. Bovendien is de vermenging van deze *tijds*notatie met de *toonhoogte*afstanden (en hun voortekens die soms hinderlijk ruimte innemen) een ekstra verwarrende faktor bij het lezen van dergelijke partituren.

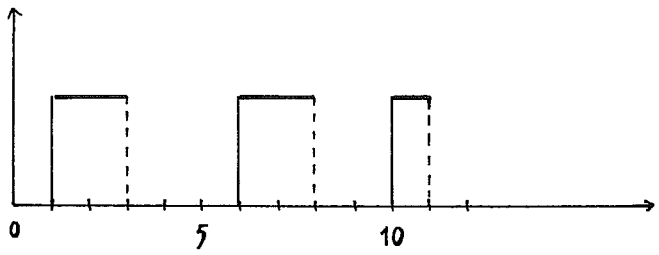


Om de lengte (duur) van dergelijke tonen aan te geven wordt vaak gebruik gemaakt van horizontale strepen die hetzij door een stok hetzij direkt met de betreffende noot verbonden zijn. Eén van de grote voordelen van deze notatie (en daarom incidenteel bruikbaar in kombinatie met de meer gangbare systemen) is, dat geleidelijke (kontinue) versnellingen en vertragingen er mee kunnen worden weergegeven. De 'divisieve' systemen (zoals

de klassieke notatie) zijn in dat opzicht tamelijk onhandig en kunnen deze vaak alleen met behulp van tempoveranderingen (= kontinue verandering van de schaaleenheid) realiseren, zodat voor de synchronisatie van individuen in ensemble verband altijd zeer ingewikkelde 'techniese' (bv meerdere dirigenten, elektronies gestuurde en/of gekoppelde metronomen) direktiemethoden te hulp moeten komen. Goede voorbeelde van een doordahctte kombinatie zijn te vinden in NO TIME van Jos Kunst (Uitg. Donemus, Amsterdam):



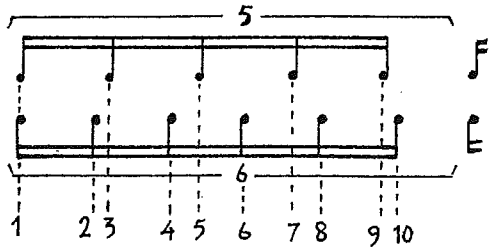
21) Van deze eigenaardige verdeling kan ook een verdelingsgrafiek gemaakt worden, die op de abcissa de werkelijke intervalgrootten vermeldt, dus op de wijze van afb 30, en wel als volgt:



Opnieuw geldt, dat de totale oppervlakte 1 moet zijn en het is gemakkelijk te zien dat elke intervalgrootte-klasse 1,2,6,7 en 10 afzonderlijk 1/5 van die totale oppervlakte beslaan.

22) Het maximum kan veel hoger, zoals Xenakis in latere werken ook laat blijken.

23) 10 plaatsen in 1 seconde komt bv overeen (in traditionele muzieknotatie) met de volgende posities van de noten binnen de ♩=60:



24) Van echte waarschijnlijkheidsrekening is in feite bij Xenakis geen sprake omdat zijn werkwijze uitsluitend de konstruktie van *verdelingen* omvat die niets met *voorspellingen* te maken hebben t.a.v. verschijnselen. Deze verdelingen zijn weliswaar in gebruik bij kansberekening, maar behoren in eerste instantie tot de wiskundige beschrijvingsmodellen die de begripskaders voor klassen van verschijnselen vormen.

25) Het kwadraties gemiddelde wordt uitgedrukt door de wortel uit de som van alle kwadraten van alle snelheden te delen door hun totale aantal. Bv het kwadraties gemiddelde van de getallen 1,2,2,3,6 is

$$\sqrt{\frac{1^2+2^2+2^2+3^2+6^2}{5}} = \sqrt{\frac{54}{5}} \cong 3.29$$

Het gemiddelde is $\frac{1+2+2+3+6}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$

26) Dat is de zogenaamde 'Wet van de grote getallen' waarover Xenakis bij diverse gelegenheden spreekt. Deze zegt bv dat, naarmate we een (eerlijke) munt vaker opgooien, de verdeling Kruis/Munt steeds dichter de ideale verdeling 1/2:1/2 zal benaderen. Dit geldt voor elk verschijnsel: hoe groter het aantal observaties, hoe dichter het mathematiese model benaderd wordt. Deze 'wet' wordt op bijzondere wijze toegelicht in de zgn 'Centrale Limiet Stelling'.

27) Bij statisties onderzoek is het daarom gebruikelijk een zgn *signifikantie*-waarde toe te kennen aan uitspraken over een onderzocht verschijnsel. Als de gegevens over een verschijnsel bijeengebracht zijn, beginnen de pogingen om er een mathematies model op van toepassing te krijgen. (Correlatie-tests, toetsing, steekproefvergelijkingen, 'curve-fitting'-tests etc). Als eenmaal de hypothese post vat dat de een of andere mathematiese verdeling op een verzameling van toepassing is, stelt men bv voorop dat de proeven om dat te bewijzen een signifikantie van zo en zoveel procent moeten hebben om aanvaardbaar te zijn. Meestal wordt een marge van 1 à 5 procent aangehouden, afhankelijk van de eisen die gesteld moeten worden aan de precisie van het onderzochte gebied, bv omdat bij verwerking van materialen tolerantiegrenzen zijn aangebracht (zoals in geautomatiseerde produktie systemen). De verdeling die we hier voor de gelegenheid hebben gemaakt als variant op de Normale verdeling, met zijn strenge symmetrie, kan m.a.w. onderzocht worden op de mate (signifikantie-percentage) waarin hij nog 'Normaal' is, dwz korrespondeert met de (nul-)hypothese dat het gemiddelde $m=4$ en de standaardafwijking $s=1.5$.

28) Als we er vanuit gaan dat de onder- en bovengrenzen van de snelheidsklassen goed vertegenwoordigd zijn in een verdeling, kunnen we $|m|$ iets scherper berekenen als volgt:

$$|m| = \frac{(1\times4) + (2\times3) + \ldots + (5\times2) + (2\times3) + (1\times4)}{29} \cong 1.86$$

29) Zie ook Appendix 1.

30) Zoals in 3.4.1 over de dichtheidsverdelingen, maakt Xenakis ook hier melding van "een zeker geheugen" dat op deze wijze in de toonhoogte distributie zou zijn ingebouwd: elke volgende toon wordt immers in zekere zin bepaald door zijn voorganger. Zoals we echter al een keer opmerkten, is dit geheugen niets anders dan het verschuiven van het toonhoogteprobleem naar een intervalprobleem. De kwestie van geheugen is er een van standpuntbepaling:op welk niveau wil ik een zekere garantie voor afwisseling/fluktuatie/differentiatie ingebouwd hebben. Als ik *toonhoogten* wil verdelen, moet ik een mechanisme voor toonhoogteselektie konstrueren, hetgeen kan uit een fonds van toonhoogten met restrikties voor de keuzemogelijkheden, in casu een *verdeling* van toonhoogten. Als ik *intervallen* wil verdelen moet hetzelfde gebeuren. In het eerste geval kan ik zeggen dat

elk interval bepaald wordt door zijn voorganger volgens een afhankelijkheidsrelatie met alle toonhoogten die er aan voorafgegaan zijn (waarin de kans op toon t_{u_i} is

$$P(t_{u_i}) = \frac{s-i+1}{T-k}$$

waarin i aangeeft de hoeveelste keer dat deze toon gaat optreden (dus al $i-1$ keer opgetreden is);

s het totaal aantal keren dat t_u kan optreden;

T het totaal aantal tonen dat in een segment voorkomt;

k het aantal tonen dat tot dan toe gebruikt is.

Dus de relatie is

$$i_u = f(P(t_{u_i}))$$

waarin i_u het interval vóór t_{u_i} is.

In het tweede geval is de relatie

$$h_u = h_{u-1} \pm i.$$

(Voorlopige lijst van geciteerde werken)

ALEXANDROFF, P.S.
<<Introduction á la théorie des Groupes>>
Parijs, Dunod - 1965

AYRES,jr. F.
<<Modern Algebra>>
McGraw-Hill - 1965

COX, D.R. & LEWIS, P.A.W.
<<The Statistical Analysis of Series of Events>>
London, Methuen & Co Ltd. - 1968

DERMAN, C. & GLESER, L.J. & OLKIN, I.
<<A Guide to Probabilitytheory and Application>>
Holt, Rinehart and Winston Inc. - 1973

ECO, U.
<<La Structure Absente>>
Parijs, Mercure de France - 1972

GAGNÉ, R.M.
<<The Conditions of Learning>>
Holt, Rinehart and Winston Inc. - 1970

HALMOS, P.R.
<<Naive Set Theory>>
Princeton, D. Van Nostrand Company - 1964
In het Nederlands als
<<Intuitieve Verzamelingenleer>>
Utrecht/Antwerpen, Aula-boeken - 1968

KEMENY, J.G. & SNELL, J.L. & THOMPSON, G.L.
<<Introduction to Finite Mathematics>>
Englewoods Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc. - 1966

KUNST, J.
<<Making Sense in Music I>>
Amsterdam, in 'Interface', Swets & Zeitlinger B.V. - 1976 nr 5.

VRIEND, J.N.M.
<<Wiskunde als Hulpmiddel bij de Beschrijving van Muzikale Processen en de Wijze waarop we deze Waarnemen>>
Ongepubliceerde Samenvatting van een lezing, Amsterdam 1975.
(Op aanvraag verkrijgbaar bij ASKO - Amsterdam)

XENAKIS, I.
<<Musique Formelles>>
Parijs, Eds. Richard-Masse, speciaal dubbelnummer 253 en 254 - 1963

<<Formalized Music>> (FM in de text)
Bloomington/London, Indiana University Press - 1972

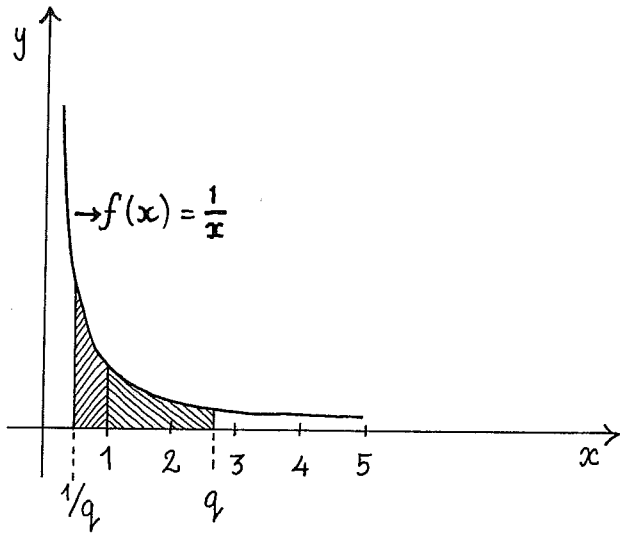
<<Musique Architecture>>
Casterman (Poche) - 1971

Omdat het getal e in de verdelingen zo'n belangrijke rol speelt volgt hier een beknopte toelichting op de voornaamste eigenschappen en funkties ervan, beperkt tot die welke voor het begrijpen van haar rol in de verdelingsfunkties van belang zijn.

Beschouw de funktie

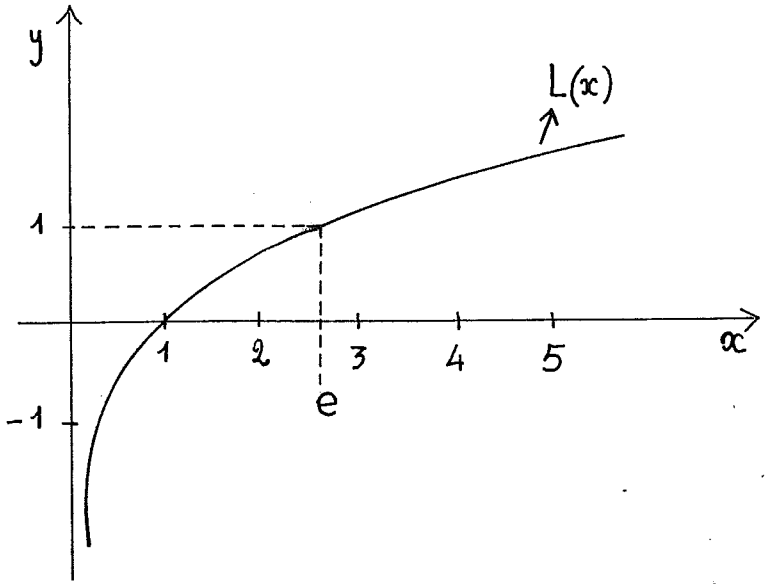
$$y = \frac{1}{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

De grafiek van deze funktie ziet er als volgt uit (afb 1.)



afb. 1

Deze funktie blijkt een aantal eigenschappen te bezitten, waarvan de volgende voor onze uiteenzetting van belang is: de oppervlakte van het gebied tussen $x=1$ en elke willekeurige $x=q$ met $q \geqslant 1$, blijkt gelijk te zijn aan de oppervlakte tussen $x=1$ en $x=\frac{1}{q}$. Van de grooten van deze oppervlakten kunnen we opnieuw een grafiek maken. Deze staat afgebeeld in afb 2.



afb. 2

Nu blijkt onder meer het volgende:

1) Als $x=1$, dan is de oppervlakte (links en rechts van $x=1$) natuurlijk 0. Wanneer we de kurve in afb 2 aanduiden met de funktieomschrijving $L(x)$, noteren we dit als volgt:

als $x=1 \longrightarrow L(x)=0$

2) Omdat de funktie (per definitie) zó is ingericht dat de oppervlakten links van $x=1$ negatief genoemd worden en rechts daarvan positief, geldt ook:

als $x=0 \longrightarrow L(x)=-\infty$

en als $x=\infty \longrightarrow L(x)=+\infty$

3) Als x en bepaald getal nadert in de buurt van 2,71828..., dan blijken de oppervlakten 1 te zijn. De uitdrukking voor deze oppervlakte is

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$$

Dit getal blijkt niet nauwkeurig benoembaar te zijn in ons decimale stelsel, net als het getal π (=3,141592...) dat nodig blijkt om de oppervlakte van een cirkel te kunnen omschrijven. Dit getal wordt in de wiskunde met e aangeduid.

Dus als $x=e \longrightarrow L(x)=1$

als $x=\frac{1}{e} \longrightarrow L(x)=-1$

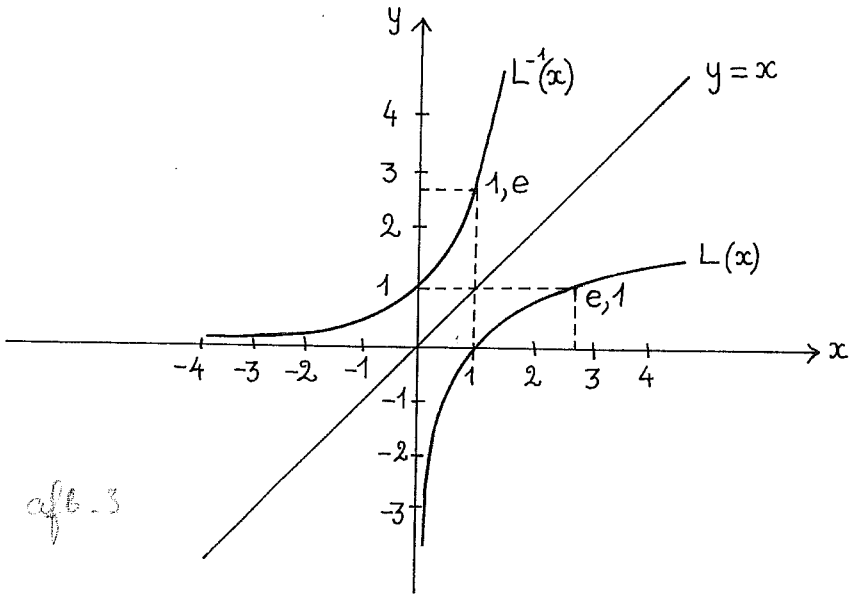
(Een andere notatie voor e en $\frac{1}{e}$ is resp. e^1 en e^{-1})

4) De funktie $L(x)$ wordt de natuurlijke LOGARITMIESE FUNKTIE genoemd, die m.a.w. wordt gedefinieerd in oppervlakten onder de kurve van $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$. Formeel, als we de oppervlakten rechts van $x=1$ met $A(1,x)$ aanduiden en die links daarvan met $-A(x,1)$, als volgt gedefinieerd:

$$L(x) = \begin{cases} A(1,x) & \text{als } x \geqslant 1 \\ -A(x,1) & \text{als } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Het getal e wordt nu de basis van de natuurlijke logaritmen genoemd, vaak aangeduid met Ln.

Vervolgens kunnen we een funktie kreëren die het spiegelbeeld of de inverse van $L(x)$ is, aangegeven met $L(x)^{-1}$. In de grafiek levert dat een symmetriek op ten opzichte van de rechte lijn $y=x$. (Zie afb 3). Deze funktie wordt de (natuurlijke) EXPONENTIELE FUNKTIE genoemd.



afb. 3

afb. 3

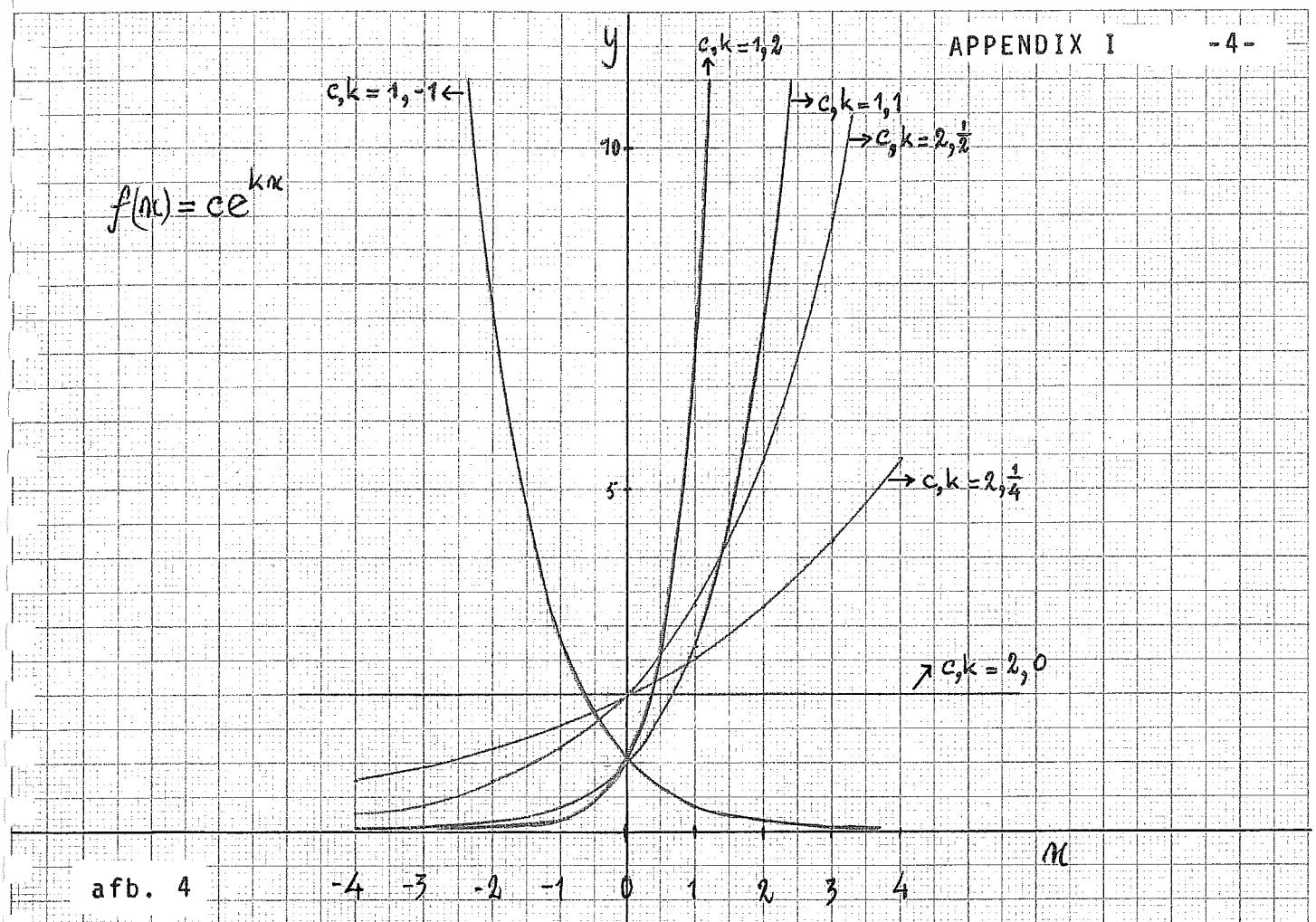
Uir bovenstaande voorbeelden blijkt al dat e een heel bijzondere rol speelt. Afgezien van alle eigenschappen van en verbanden tussen de beide funkties (en daarmee tussen exponenten en logaritmes!) speelt e een centrale rol in funkties die als mathematiese modellen voor een groot aantal natuurverschijnselen dienen, met name voor processen van *'natuurlijke groei en verval'*. De standaardvorm van deze funktie is

$$f(x) = ce^{kx}$$

waarin c meestal een positieve konstante is ($c \neq 0$) en waarin k zowel negatief als positief is. Deze konstanten kunnen vaak ingewikkelde vormen aannemen en hangen nauw samen met de aard van het betreffende verschijnsel dat beschreven moet worden. In afb 4 zijn een paar kurven getekend met verschillende waarden voor c en k, om een indruk te geven van de vormen (i.e. waarden!) die ze kunnen aannemen. Merk op, dat x de enige variabele van de funktie is, en dat e altijd de rol van het grondtal, de basis, speelt. Let bij de betudering ervan goed op, dat als k positief is en x negatief, de exponent kx negatief wordt. Als k en x beide negatief zijn, wordt kx positief etc. Een negatieve exponent betekent altijd: $\frac{1}{e^{kx}}$

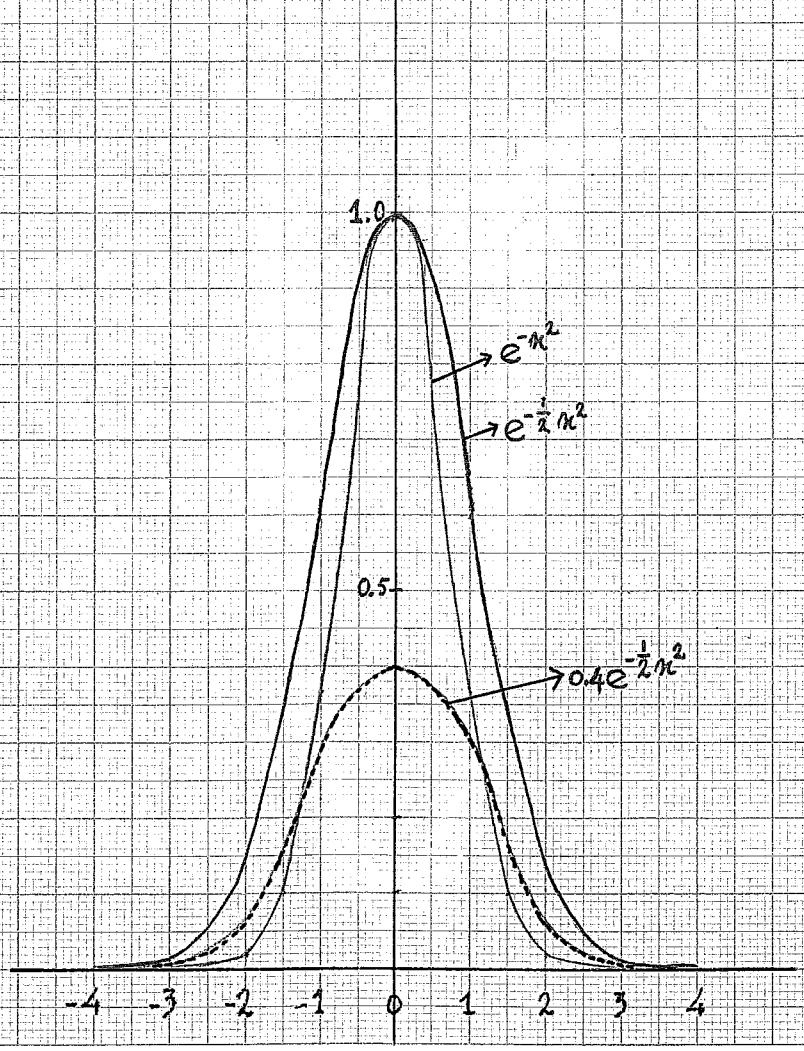
Ook geldt (per definitie) dat $e^0=1$.

We zien dat c, in deze vorm van de funktie, in feite het getal is dat het snijpunt op de y-as aangeeft, derhalve een konstante



$f(x) = ce^{kx}$

afb. 4



afb. 5

die 'effekt' op de hoogte van de kurve heeft.

Hoe wordt zo'n kurve nu omgewerkt tot het klokmodel, of met andere woorden: hoe zorgen we ervoor, dat de kurve bij de overgang van positieve naar negatieve waarden van x weer teruggaat? De oplossing ligt in een definitie van het machtsverheffen: als we x kwadrateren (of tot een macht verheffen die *even* is) worden alle waarden, ook de negatieve, van x positief.

$$x^2=(-x)^2$$

of $x^p=(-x)^p$ als $p=2,4,6,\ldots$

We kunnen gemakkelijk inzien dat de funktie

$$f(x) = e^{x^2}$$

bij groter wordende x zeer snel toeneemt, zoals in het volgende tabelletje gemakkelijk te zien is (afb 6). Deze funktie heeft echter de vorm van een omgekeerde klok en we moeten juist afnemende waarden hebben voor toenemende x. Deze verkrijgen we natuurlijk door de funktie 'om te keren':

$$f(x) = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

In de tabel zijn voor een aantal waarden van x de waarden van $f(x)$ vermeld. De lezer wordt uitgenodigd om na te checken dat de funktie

$$f(x) = 0.4e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

de Gauss verdeling is met standaardafwijking $s=1$ en gemiddelde $m=0$. (Zie 3.3.5 - 3.3.7)

x	x^2	e^{x^2}	e^{-x^2}	$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$e^{-\frac{1}{2}x^2}$
-4	16	zeer groot	zeer klein		
-3	9	8103,...	0.00012	0.011	0.0044
-2	4	54.598	0.0183	0.135	0.0540
-1.5	2.25	9.488	0.105	0.326	0.1304
-1	1	2.718	0.368	0.606	0.2424
-0.5	0.25	1.284	0.779	0.887	0.3548
0	0	1	1	1	0.4000
0.5	0.25	1.284	0.779	0.887	0.3548
1	1	2.718	0.368	0.606	0.2424
1.5	2.25	9.488	0.105	0.326	0.1304
2	4	54.598	0.0183	0.135	0.0540
etc.					

afb. 6

In afb 5 staan enkele van de funkties in een grafiek getekend. Tenslotte blijkt e ook nog de volgende eigenschappen te bezitten: $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ en $e = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

TABEL.
Deze tabel geeft percentages (oppervlakten) links van de waarden van z onder de 'klok' van de Gauss-verdeling.

(1)

TABEL VAN OPPERVLAKTEN (percentages) LINKS VAN z-WAARDEN.

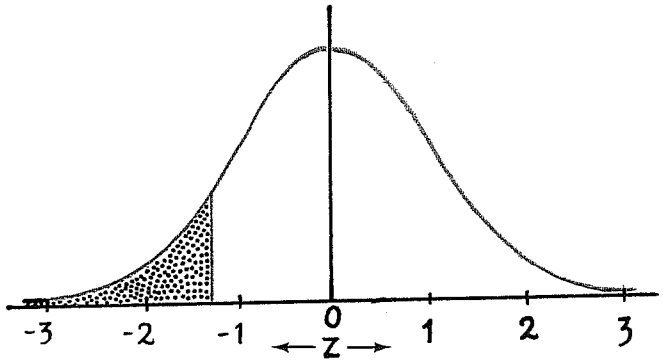
z	.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	.00003	.00003	.00003	.00003	.00003	.00003	.00002	.00002	.00002	.00002
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00191	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04139	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702

Percentages links van z (vervolg)

(2)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19251	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414
+0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.69257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.61552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93547	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997
4.0	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99998



(Poisson)

x \ m	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x \ m	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x \ m	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x \ m	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

x \ m	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

Table T.2 (*continued*)

N	n	Np	k	$p_X(k)$	N	n	Np	k	$p_X(k)$
9	8	2	1	0.2222	9			5	0.4444
			2	0.7778		8	6	5	0.6667
	8	3	2	0.3333				6	0.3333
			3	0.6667		8	7	6	0.7778
	8	4	3	0.4444				7	0.2222
			4	0.5556		8	8	7	0.8889
	8	5	4	0.5556				8	0.1111

Percentages uit de POISSON-verdeling.

x \ m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x \ m	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

x \ m	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x \ m	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132

(Poisson)

x \ m	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x \ m	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

(vervolg)

x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
					m					
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
					m					
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037